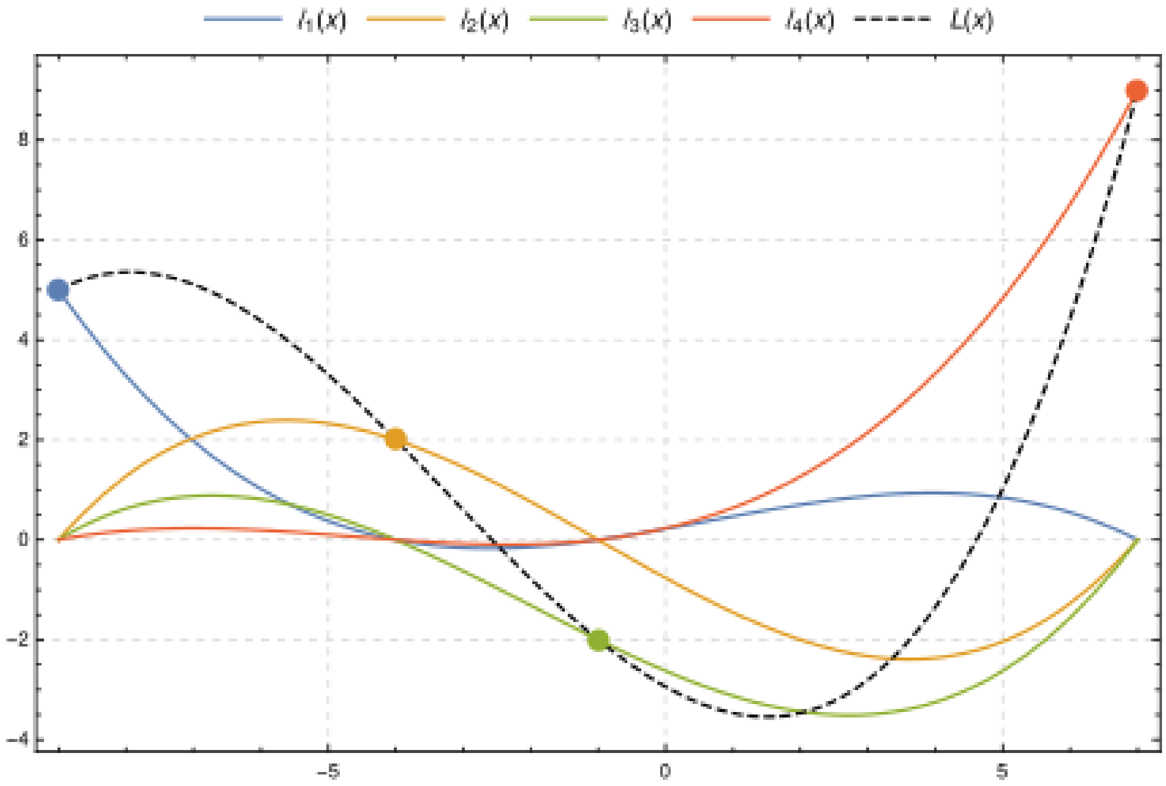
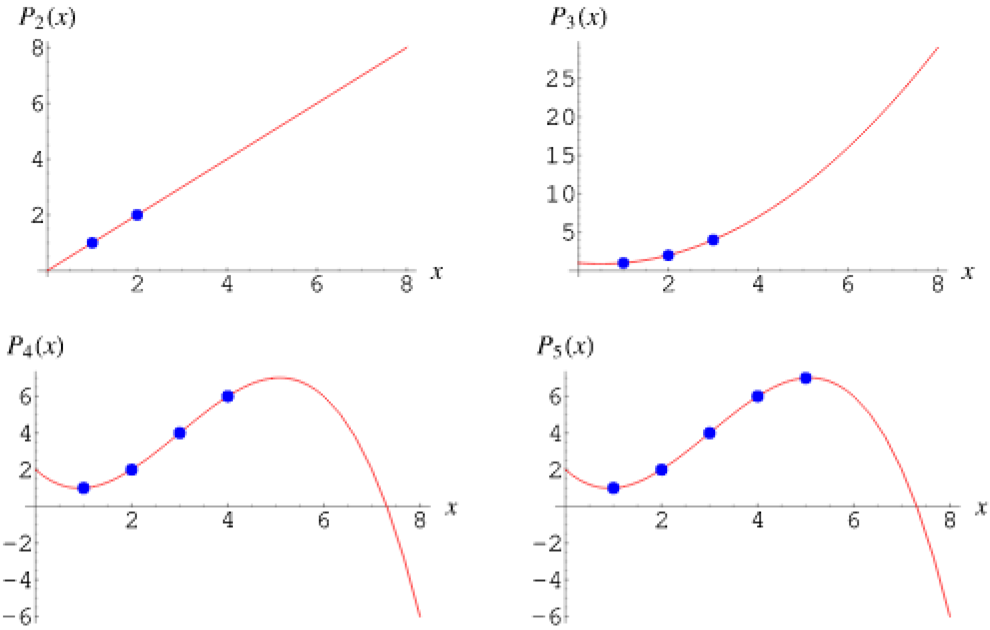
INTERPOLAZIONE DI LAGRANGE



Noemi Pagani
26/05/2022
3^A

L’interpolazione di Lagrange è un particolare tipo di interpolazione polinomiale che fu scoperta per la prima volta da Edward Waring nel 1779, successivamente da Leonhard Euler nel 1783 e in fine riscoperta da Joseph Louis Lagrange, un matematico e astronomo italiano, nel 1795.
Prima di trattare nello specifico dell’interpolazione di Lagrange è bene definire cosa si intende con interpolazione polinomiale e con polinomi di Lagrange.



INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

L’**interpolazione polinomiale** è una tecnica di approssimazione di funzioni che a partire da una funzione *f (x)* di cui è noto un numero discreto e limitato di punti ne calcola un'approssimazione che passa precisamente per tali punti noti.
In particolare, siano dati $n + 1$ punti rappresentanti le coppie di numeri reali
$(x_i; y_i) \rightarrow i = 0, \ldots, n$
L’interpolazione polinomiale *φ(x)* sarà anch’essa una funzione, tale per cui:
$\varphi(x_i) = y_i \rightarrow i = 0, \ldots, n$
Dove:

- $\varphi(x_i)$ è il polinomio interpolante
- *xi* è l’ i-esimo nodo del polinomio

In tale modo il grafico di *f* passa per i punti dati.
Se la funzione *f (x)* è un polinomio si parla di interpolazione polinomiale o Lagrangiana, se *f (x) é* una funzione razionale si parla di interpolazione razionale, se *f (x)* è una funzione trigonometrica si parla di interpolazione trigonometrica.

POLINOMI DI LAGRANGE
La base della rappresentazione in forma di Lagrange è costituita dai polinomi caratteristici di Lagrange $\left\{l_i(x)\right\}_{i=0}^{n}$ polinomi tutti di grado n, se è rispettata la condizione di esistenza e unicità del polinomio ($x_i \neq x_j$ $per\ i \neq j$)
Questa condizione prevede che:
Dati n+1 punti distinti $x_0, x_1,..., x_n$ e i valori $y_0, y_1,..., y_n$, il polinomio P_n di grado al più n, tale che:
$P_n(x_i) = yi,\ i = 0,..., n$
è unico.
Per dimostrare ciò, bisogna procedere per assurdo.
Si supponga che esistano due polinomi distinti P_n e Q_n con grado massimo pari ad n tali che:
$P_n(x_i) = yi,\ Q_n(x_i) = yi \rightarrow i = 0,..., n$
Mettendo a sistema le due equazioni risulta evidente che:
$(P_n - Q_n)(x) = 0 \rightarrow i = 0,..., n$

Si può affermare quindi che:

$$(P_n - Q_n)(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

Di conseguenza è un polinomio di grado n + 1; considerazione assurda, visto che la differenza di due polinomi di grado n non comporta un aumento del grado.
Il polinomio che rispecchia la condizione viene definito per l'appunto polinomio interpolante o di Lagrange; il suo valore si può ricavare facendo:

$$l_i(x) = \prod_{j \neq i,\, j=0}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$l_i(x) = \prod_{j \neq i,\, j=0}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{(x - x_0) + \ldots + (x - x_{i-1}) + (x - x_{i+1}) + \ldots + (x - x_n)}{(x_i - x_0) + \ldots + (x_i - x_{i-1}) + (x_i - x_{i+1}) + \ldots + (x_i - x_n)}$$

Dove:

- $\prod_{j\neq i, j=0}^{n}$ rappresenta la produttoria, ovvero il simbolo della moltiplicazione
- x_j i valori degli altri nodi

Per tali polinomi vale la proprietà:

$$l_i(x) = \begin{cases} 1 & x = x_i \\ 0 & x = x_j \end{cases}$$

INTERPOLAZIONE DI LAGRANGE

Nel momento in cui ci si sposta sul piano cartesiano, la funzione considerata viene influenzata dal valore dell'ordinata. Il polinomio interpolante rappresentato in forma di Lagrange, prende il nome di polinomio interpolante di Lagrange, ed è definito dalla seguente formula:

$$P(x) = \sum_{i=o}^{n} y_i \cdot l_i(x)$$

Dove:

- *P(x)* rappresenta il polinomio finale
- y_i l'ordinata del punto considerato

La dimostrazione di questa formula è molto semplice.
sostituendo $P(x_i)$ a *P(x)* si potrebbe riscrivere la formula come segue:

$P(x_i) = y_0 l_0(x_i) + y_1 l_1(x_i) + ... + y_i l_i(x_i) + ... + y_n l_n(x_i)$

Dato che $l_0(x_i)$, $l_1(x_i)$, ..., $l_n(x_i)$=0 e che $l_i(x_i) = 1$ per le motivazioni prima citate, si può dedurre che: $P(x_i) = y_i$

Ciò rispecchia la condizione di interpolazione premessa all'inizio

ERRORI DI INTERPOLAZIONE

L'errore di interpolazione, chiamato anche resto dell'interpolazione, corrisponde a quanto la funzione interpolante si discosta dalla funzione di partenza.

$|f(x) - L_n(x)| = R_n(f, x)$

Per individuare l'errore bisogna considerare la funzione *f* e il polinomio $L_n(x)$ tale che $y_i = f(x_i),\ i = 0, ..., n.$

Sia $f \in C^{n+1}([a, b])$; supponendo che $x_0, ..., x_n \in [a, b]$ e che il polinomio P_n sia tale per cui $P_n(x_i) = f(x_i),\ i = 0, ..., n.$, allora

$$E_n[f](x) := f(x) - P_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!}$$

Dove ξ ∈ I con I il più piccolo intervallo aperto contenente *0,...,n.*

L'esistenza del punto ξ è di fatto inutilizzabile dal punto di vista applicativo, ma è un'elemento essenziale per dimostrare il caso in cui l'interpolante coincida con la funzione *f*.

Supponendo che $f \in P_n$, allora la sua derivata n + 1-esima sarà pari a zero. Di conseguenza, essendo $R_n(f, x)$=0, si può affermare che:

$L_n(x)=f$

ESEMPI:
Si determini l'equazione del polinomio di terzo grado la cui curva passa per i punti A(−2; 2), B(0; 2), C(1;−1) e D(2; 0)

PRODUTTORIA

$$L_a = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-2-0)(-2-1)(-2-2)} = \frac{(x^2-x)(x-2)}{-24} = \frac{-x^3+x^2+2x^2-2x}{+24}$$

$$L_b = \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{(0+2)(0-1)(0-2)} = \frac{(x^2-4)(x-1)}{4} = \frac{x^3-x^2-4x+4}{4}$$

$$L_c = \frac{(x+2)(x)(x-2)}{(+1+2)(+1-0)(+1-2)} = \frac{(x^2-4)(x)}{-3} = \frac{-x^3+4x}{3}$$

$L_d \rightarrow$ Tralasciata perché $y_d = 0$

$y_i \cdot L_i(x)$

$$P_a = 2 \; \frac{-x^3+3x^2-2x}{24} = \frac{-x^3+3x^2-2x}{12}$$

$$P_b = 2 \; \frac{x^3-x^2\;4x+4}{4} = \frac{x^3-x^2-4x+4}{2}$$

$$P_c = -1 \; \frac{-x^3+4x}{3} = \frac{+x^3-4x}{3}$$

SOMMATORIA

$$\frac{-x^3+3x^2-2x}{12} + \frac{x^3-x^2-4x+4}{2} + \frac{+x^3-4x}{3} =$$

$$= \frac{-x^3+3x^2-2x+6x^3-6x^2-24x+24+4x^3-16x}{12} =$$

$$= \frac{9x^3-3x^2-42x+24}{12} =$$

$$= \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + 2$$