



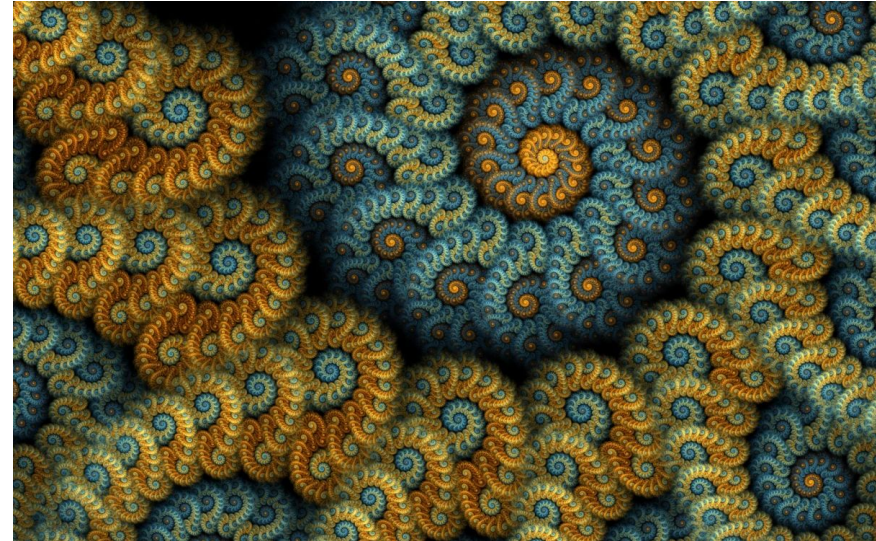
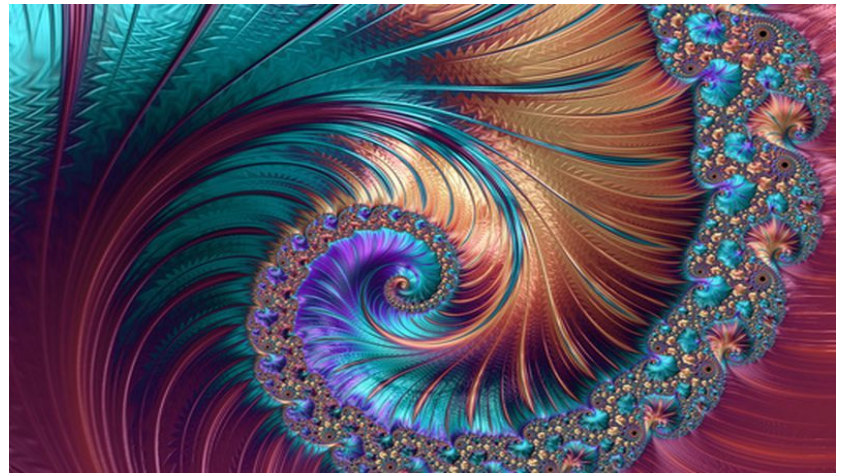
I FRATTALI

Martina Sorri e Laura Pagliari

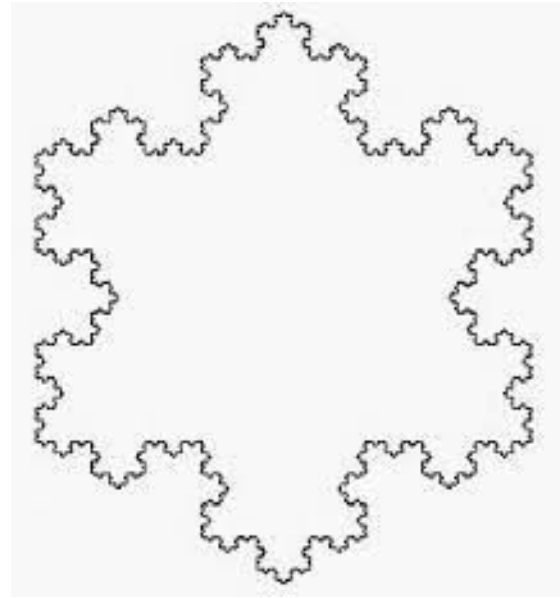
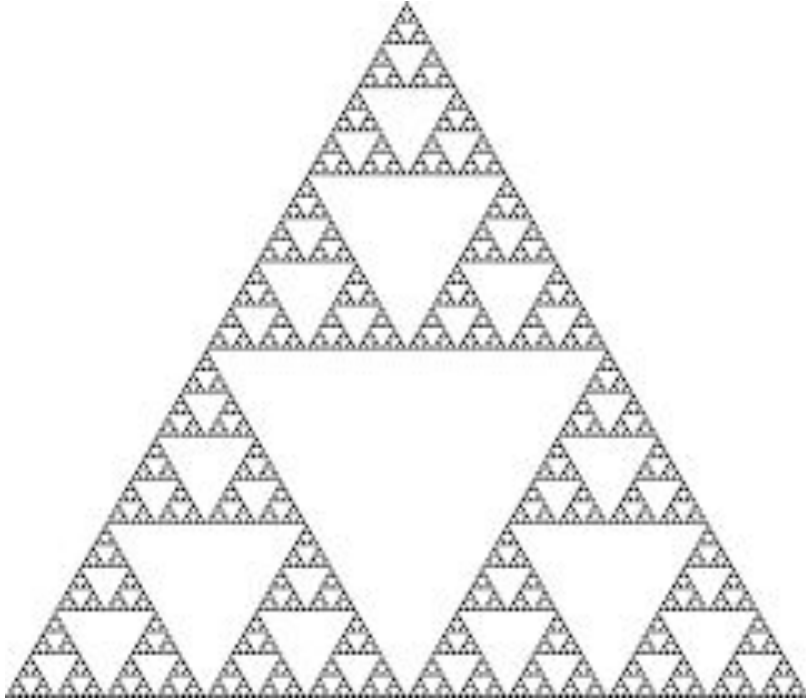
COS'È UN FRATTALE:

Un frattale è una figura geometrica che possiede un'**Omotetia Interna**

Dai frattali si ha la Geometria Frattale che non è euclidea e viene usata per spiegare il “moto browniano” o la forma delle galassie oppure anche le forme delle montagne o di alcune parti del nostro corpo...



OMOTETIA INTERNA:



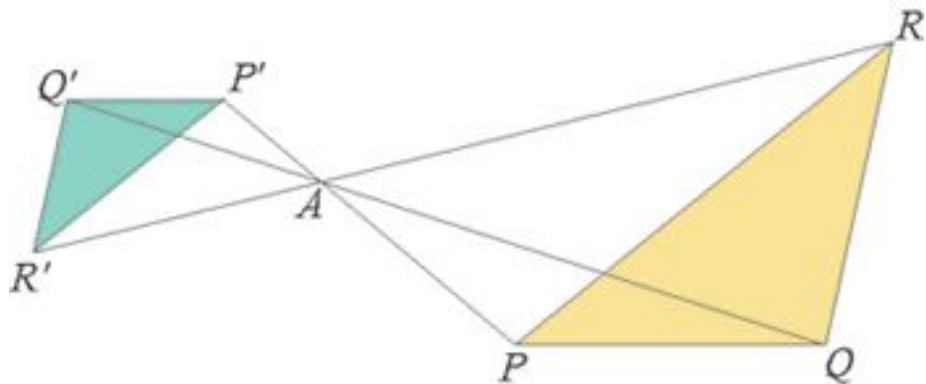
Omotetia Interna (deriva dal greco “ομὸς” + “τίθημι”) ovvero la forma iniziale della figura presa in considerazione si ritrova infinite volte all’interno della figura stessa; questa caratteristica da alcuni viene chiamata anche “*Auto Similarità*”.

DEFINIZIONE:

Il punto A è il centro, mentre c è il rapporto dell'omotetia. Questa trasformazione geometrica è anche chiamata con termini più familiari:

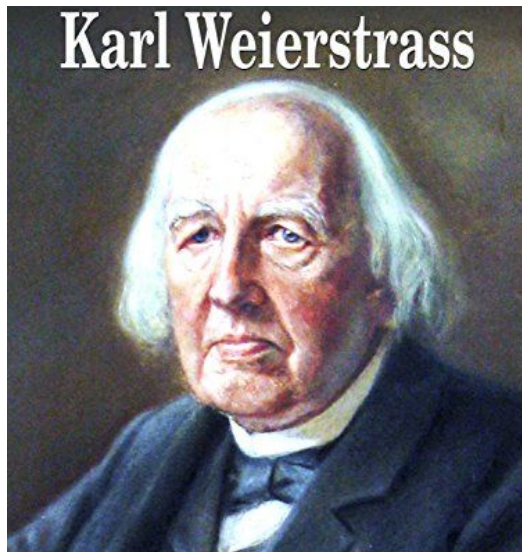
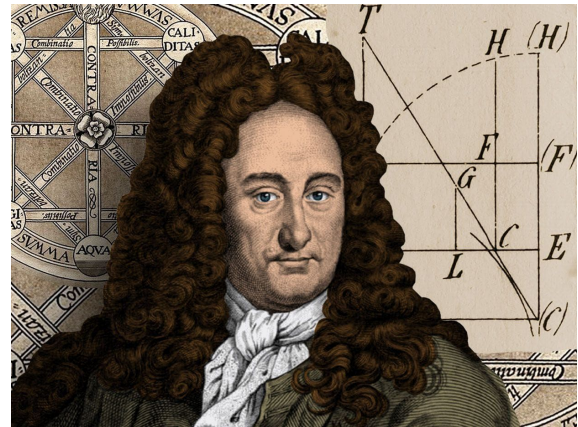
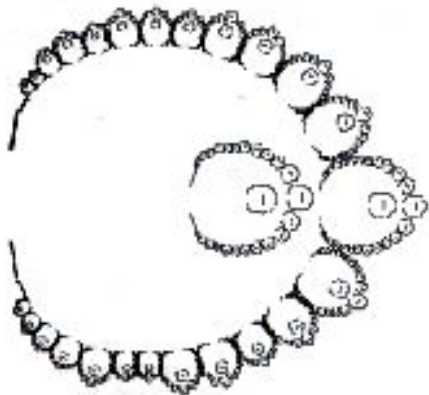
- dilatazione, se $|c| > 1$
- contrazione, se $0 < |c| < 1$
- se $c=1$ si ottiene ovviamente l'identità, cioè la trasformazione nella quale ogni punto corrisponde a sé stesso.

L'omotetia è una particolare similitudine.



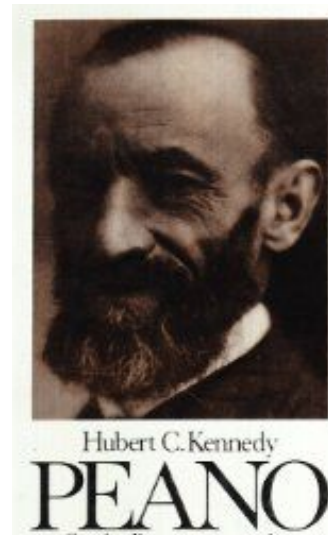
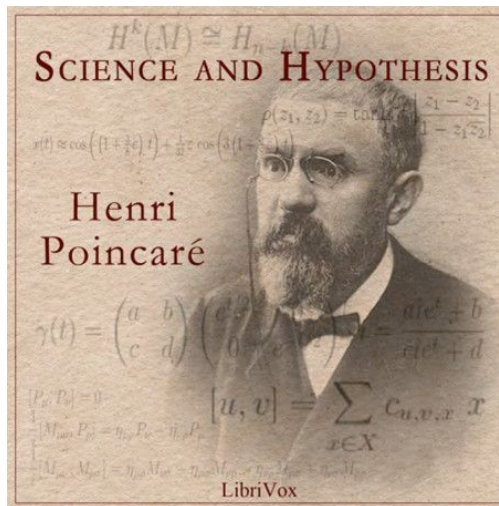
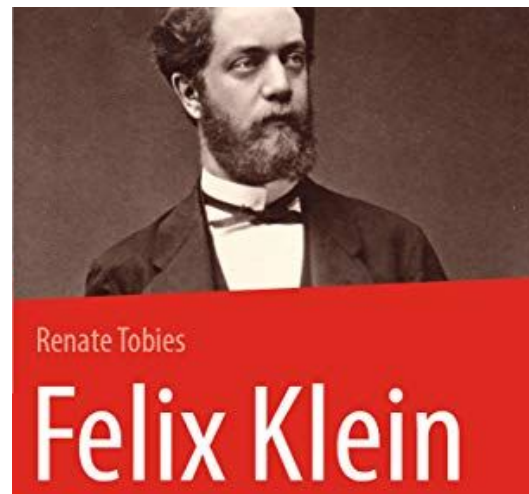
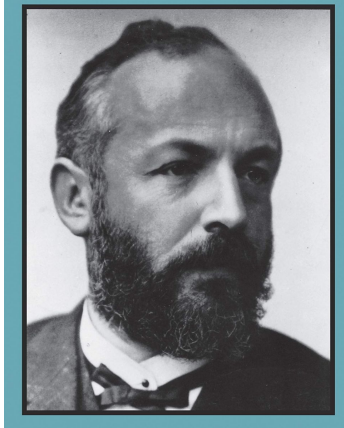
STORIA

- Sono un argomento relativamente recente della geometria.
- Primi spunti dai villaggi circolari africani.
- Leibniz utilizzò il termine "esponenti frazionari", anche se la geometria non li conosceva ancora, tanto che i pochi matematici che provarono a fare degli studi su questo argomento vennero considerati "mostri".
- Karl Weierstrass, primi studi condotti il 18 luglio 1872.



- Nel 1883, Georg Cantor → insiemi di Cantor
- Felix Klein e Henri Poincaré introdussero una categoria di frattali che è stata chiamata frattali "auto-inversi".
- Giuseppe Peano

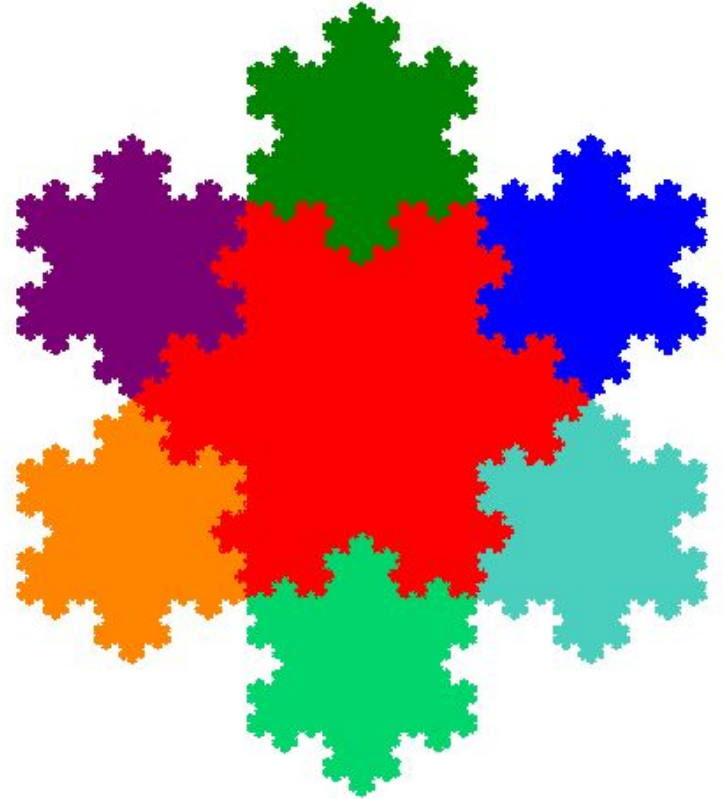
GEORG CANTOR



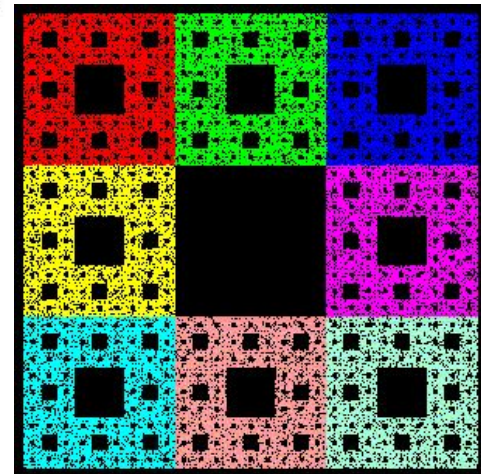
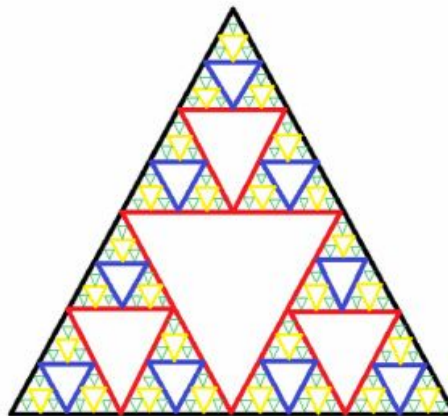
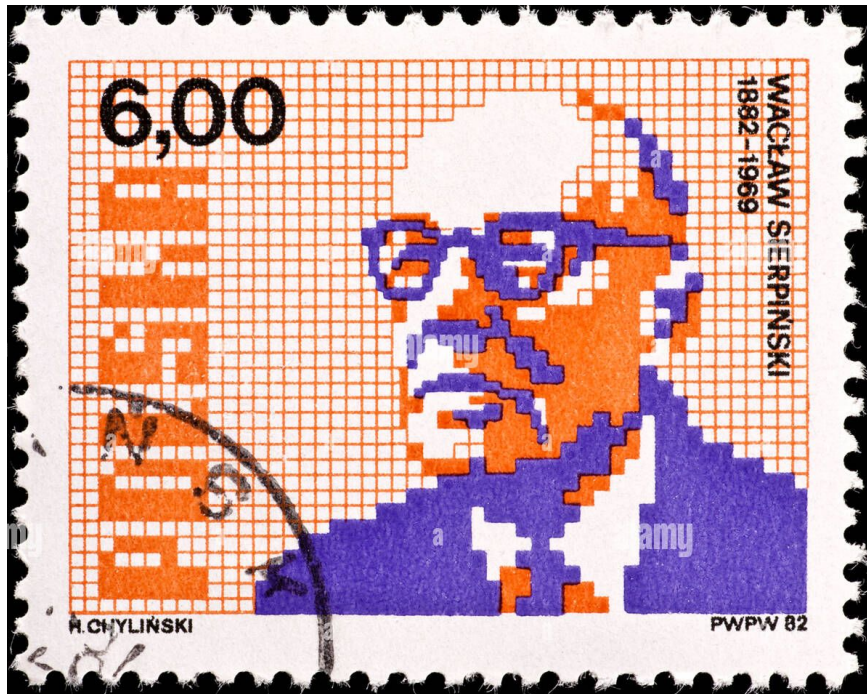
- Nel 1904, Helge von Koch diede una definizione più geometrica che includeva immagini disegnate a mano di una funzione simile (fiocco di neve di Koch).



Helge
von KOCH



- Nel 1915, Waclaw Sierpiński costruì il suo triangolo e poi, un anno dopo, il suo tappeto.



- Nel 1918, due matematici francesi, Pierre Fatou e Gaston Julia, nonostante abbiano lavorato in modo indipendente, sono arrivati a risultati che descrivono quello che oggi è visto come un comportamento frattale associato alla mappatura di numeri complessi e funzioni iterative e che porta a ulteriori idee su attrattori e repulsori, che sono diventati molto importante nello studio dei frattali.



Pierre Fatou
1878 - 1929



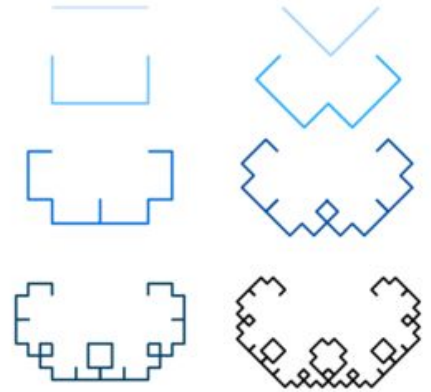
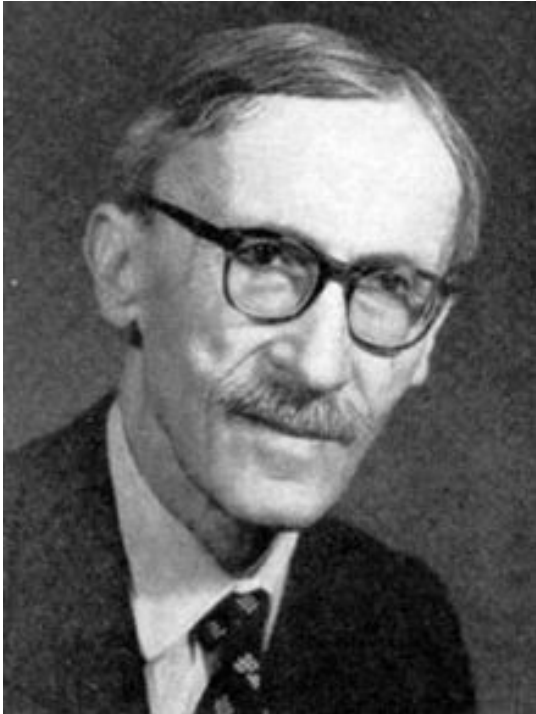
Gaston Julia
1893 - 1978

- Nel marzo 1918, Felix Hausdorff ampliò la definizione di "dimensione", in modo significativo per l'evoluzione della definizione di frattali, per consentire agli insiemi di avere dimensioni non intere.

FELIX HAUSDORFF 1868 - 1942



- L'idea di curve autosimili è stata ulteriormente sviluppata da Paul Lévy, che nel suo articolo del 1938 *“Plane or Space Curves and Surfaces Consisting of Parts Similar to the Whole”* descrisse una nuova curva frattale, la curva C di Lévy.



- A partire degli anni Sessanta si può parlare di una branca chiamata geometria frattale, grazie all'opera di matematici come il francese Benoît Mandelbrot (che nel 1975 ha anche coniato il termine "frattale").



DIMENSIONE

- Un frattale può essere definito come un oggetto a dimensione frazionaria.
- La dimensione frattale D viene definita nel seguente modo:

$$D = \log N / \log (1/K)$$

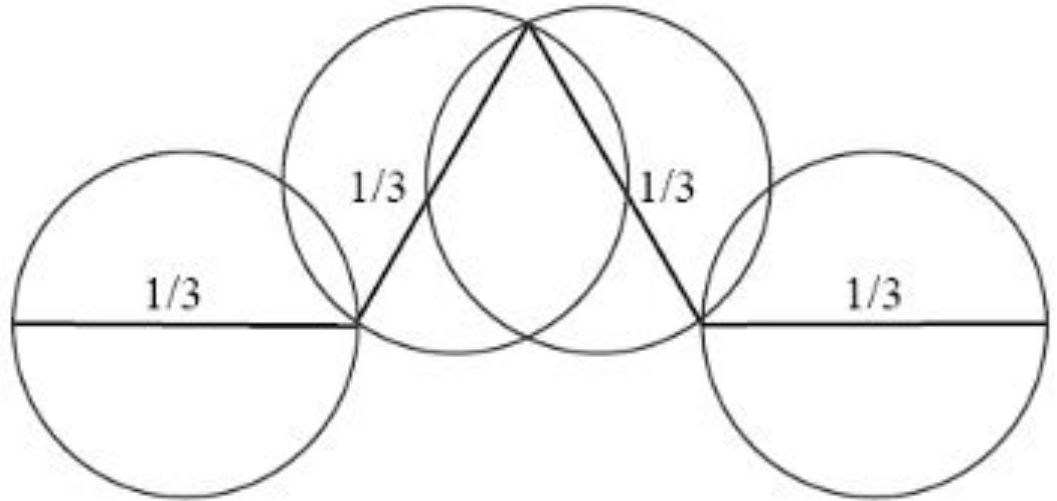
In tre esempi con $K = 1/N$.

Otteniamo:

$$D_{\text{segmento}} = \log N / \log(N) = 1;$$

$$D_{\text{quadrato}} = \log(N^2) / \log(N) = 2;$$

$$D_{\text{cubo}} = \log(N^3) / \log(N) = 3.$$



La dimensione frattale è quindi definita da:

$$D = \frac{\log N(l)}{\log l}$$

Log N/Log M

= logaritmo (numero di parti)/logaritmo (fattore di ingrandimento)

PROPRIETÀ:

$$N = 2^d$$

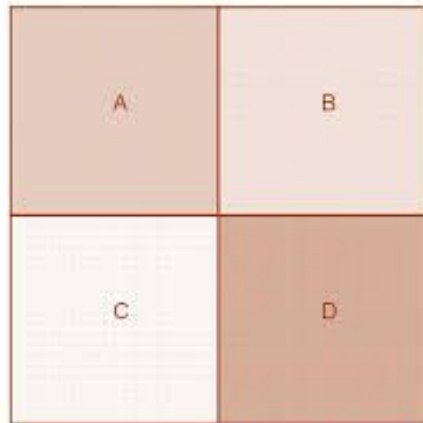
N: indica il numero minimo di figure uguali fra loro nella figura data,
d: rappresenta la dimensione presa in considerazione

QUADRATO:

$$N=4$$

$$d=2$$

$$4=2^2$$

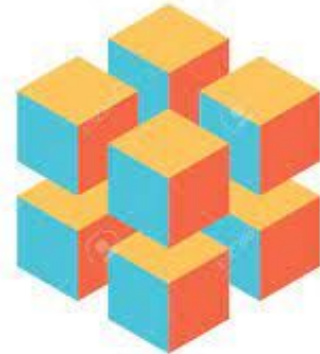


CUBO:

$$N=8$$

$$d=3$$

$$8=2^3$$



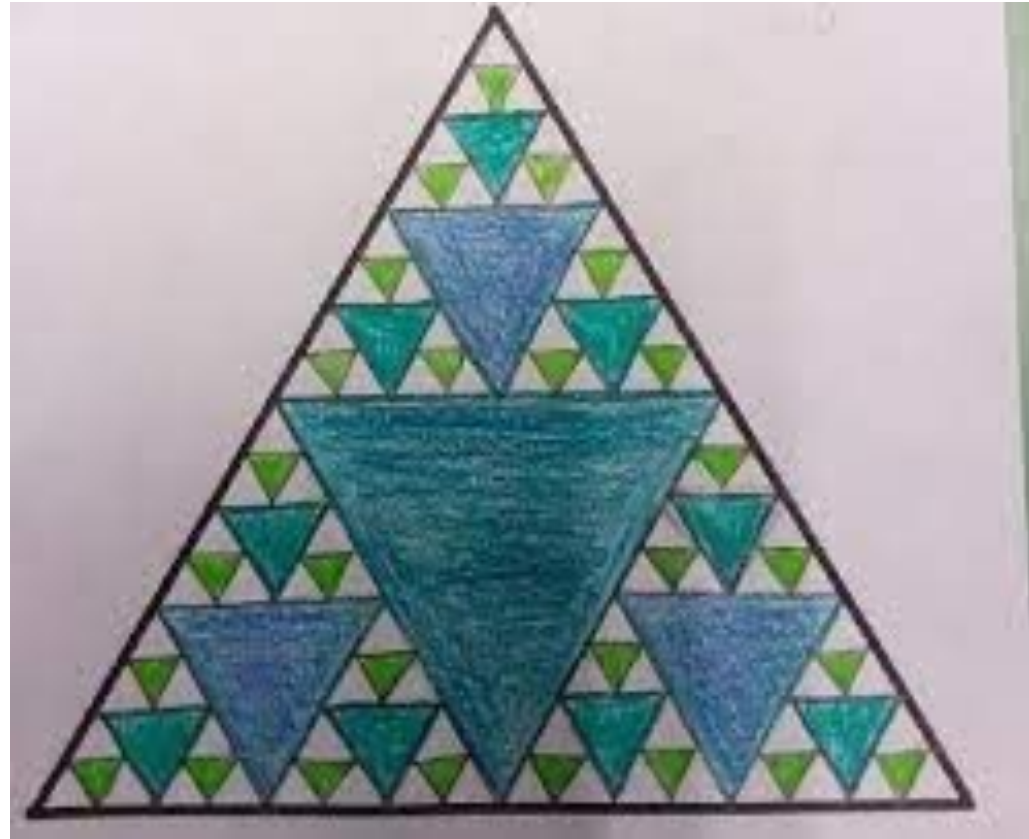
TRIANGOLO di SIERPIŃSKI:

N=3

$d=2$

$3 \neq 2^2$

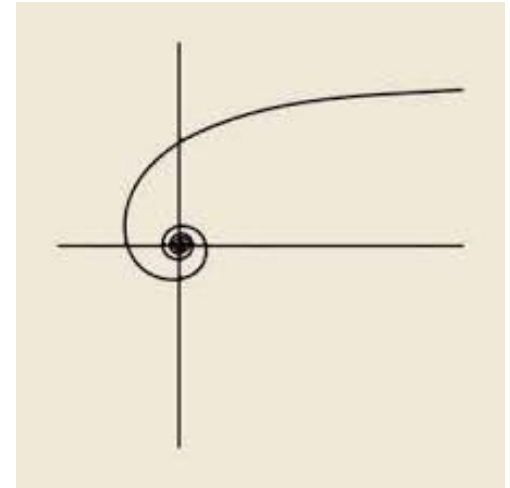
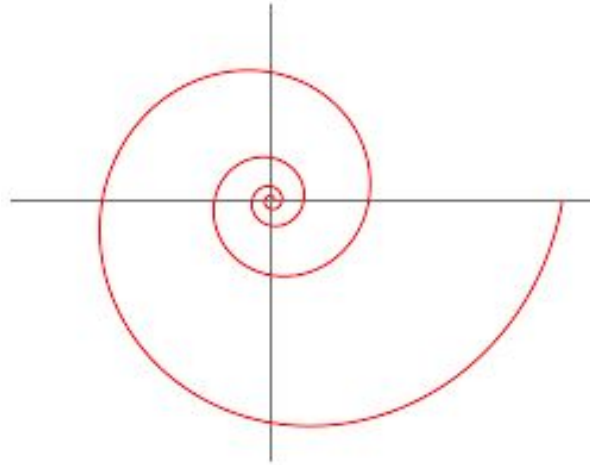
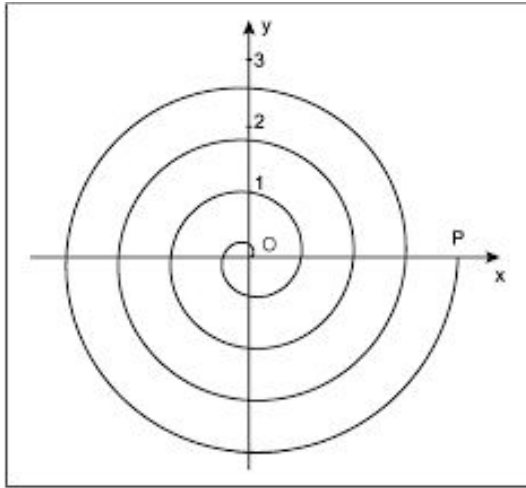
I frattali non sono figure intere
perchè non rispondono a questa
formula



SPIRALI

Le spirali sono alla base delle figure frattali.

Solitamente le spirali piane vengono suddivise in tre gruppi:
Spirale di Archimede, *Spirale Iperbolica* e *Spirale Logaritmica*



LA SPIRALE DI ARCHIMEDE

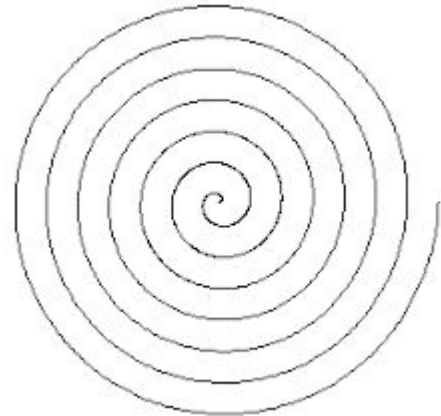
La spirale di Archimede è la base da cui derivano tutti gli altri tipi di spirali.

$$r = a\phi$$

r corrisponde alla distanza del punto P dall'origine (in modulo)

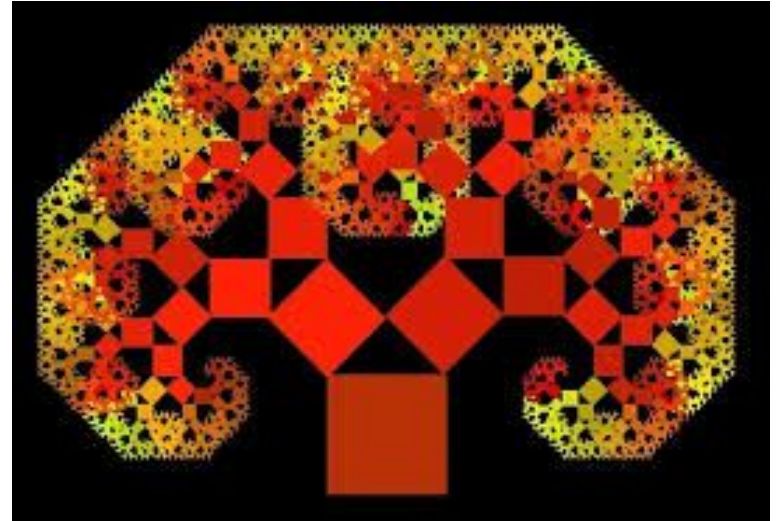
ϕ all'angolo tra OP e l'asse delle x

r è sempre maggiore o uguale a 0 e l'angolo cresce in senso antiorario da 0 e una rotazione completa aumenta l'angolo di 2π radianti.

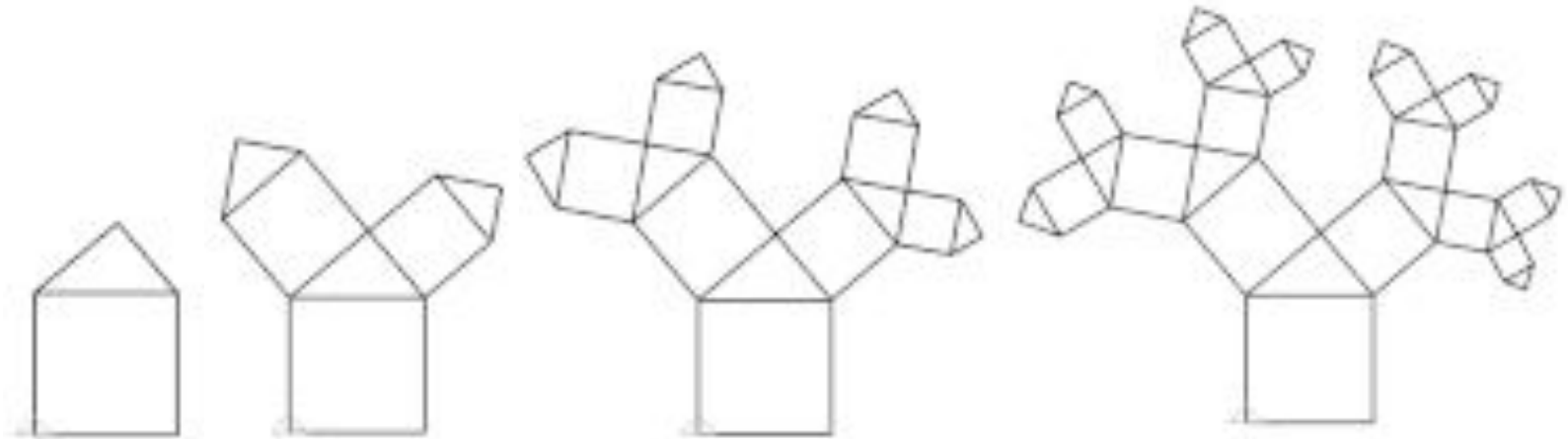


L'ALBERO di PITAGORA

L'albero di Pitagora risulta disegnato per la prima volta da Albert E. Bosman intorno al 1942, il quale nel 1957 pubblicò un libro che conteneva la sua ricerca sulla figura frattale.



La sua costruzione inizia con un quadrato. Su un lato si costruisce un triangolo rettangolo sui cateti del quale si costruiscono altri due quadrati. Si ripete l'operazione sui due quadrati costruendovi triangoli rettangoli simili al primo. Si procede così all'infinito.

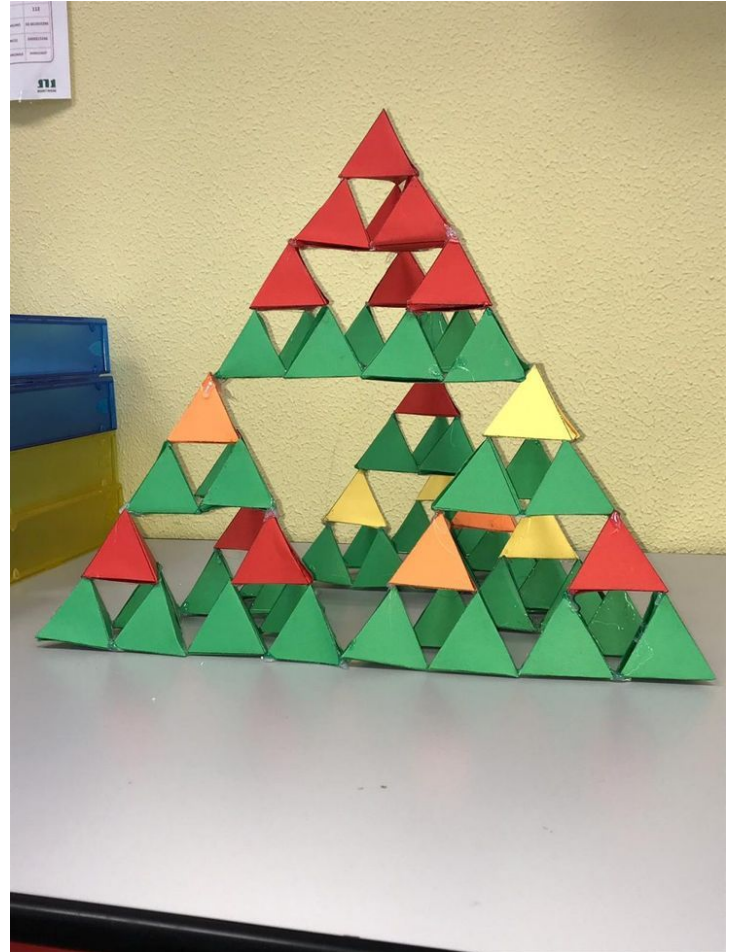


CURVE E INSIEMI



TRIANGOLO DI SIERPIŃSKI:

Il “*Triangolo di Sierpiński*” è una delle curve frattali più conosciute che prende il nome da Waclaw Sierpiński che lo descrisse per la prima volta nel 1915. Questo è un esempio lampante di Auto-Similarità dal momento che è formato da un triangolo equilatero che si ripete in continuazione al suo interno.



. Partendo dal triangolo:

Livello 0 Si parte da un triangolo equilatero di lato a

Livello 1 Si congiungono i punti medi di ciascun lato individuando quattro triangoli simili al primo (di lato a/2) di cui tre ugualmente orientati e uno capovolto

Livello 2 Si ripete l'operazione di scomposizione precedente su ciascuno dei tre triangoli non capovolti ottenendo 9 triangolini non capovolti di lato a/4.

Livello 3 Si ripete la stessa operazione sui 9 triangoli ottenendone 27 di lato a/8.

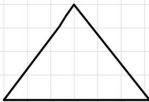
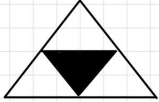
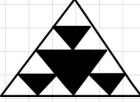
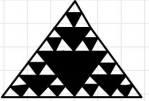
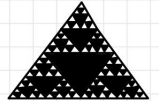

.....

Livello n Si ottengono 3^n triangoli di lato $2^{-n}a$ (ricordiamo che a è il lato del triangolo al livello 0)

Continuando all'infinito il limite è il triangolo di Sierpinski

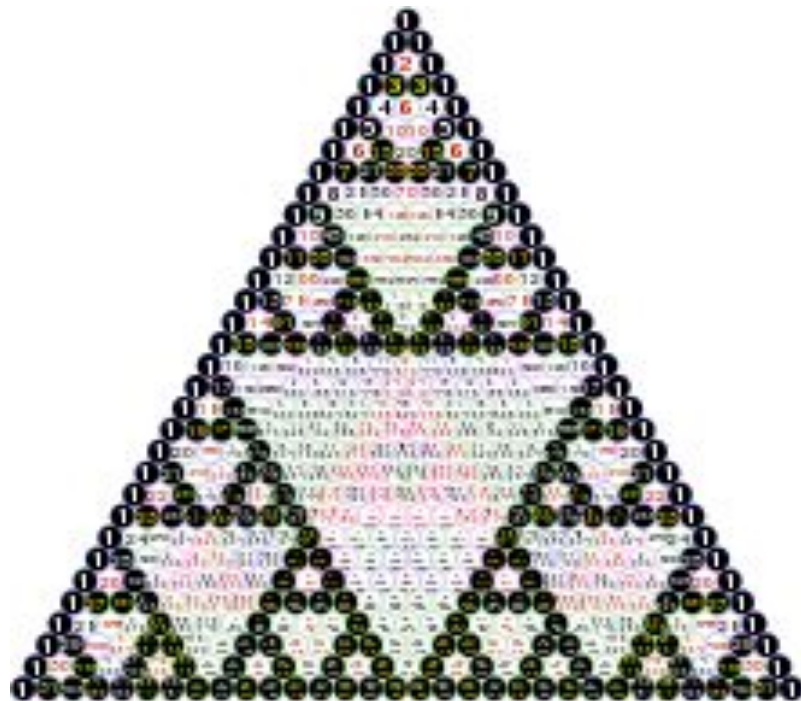


TRIANGOLO di SIERPIŃSKI

		
$3^0 = 1$	$3^1 = 3$	$3^2 = 9$
		
$3^3 = 27$	$3^4 = 81$	www.lafinestrasullalbero.it

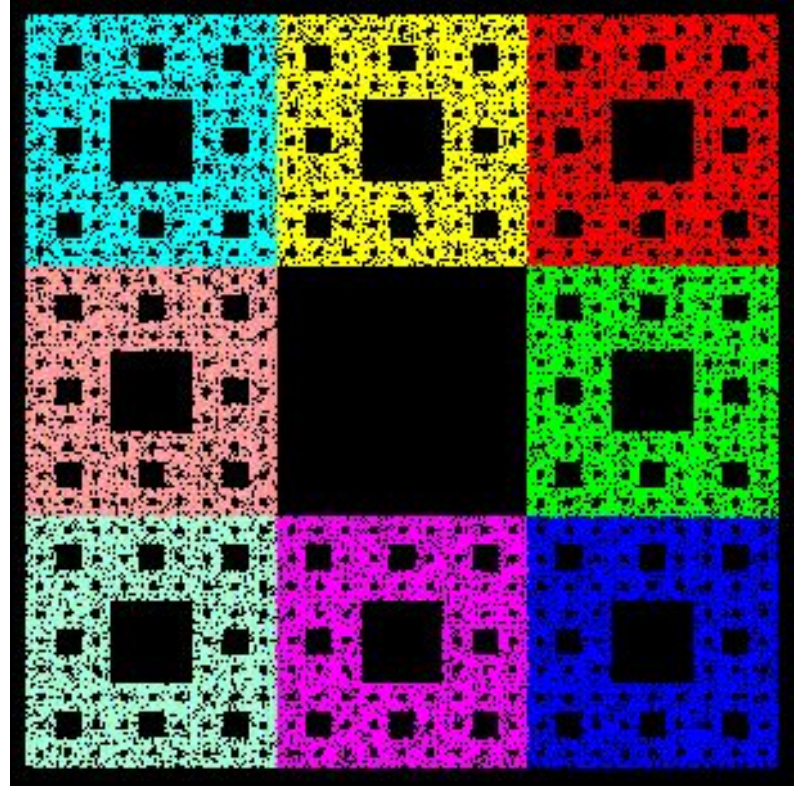
IL TRIANGOLO DI TARTAGLIA

Un esempio di “Triangolo di Sierpiński” si può vedere nel Triangolo di Tartaglia, ma solo se preso in modulo 2, in cui i numeri pari vengono colorati mentre quelli dispari rimangono bianchi. Se lo si prende in questo modo piano piano si forma il “Triangolo di Sierpiński”



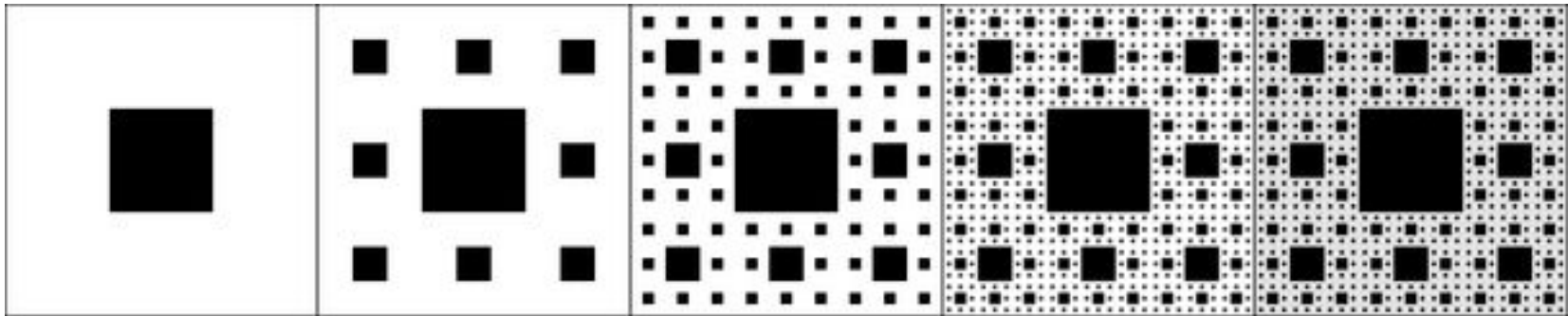
TAPPETO DI SIERPIŃSKI:

Il tappeto di Sierpinski è una variante del triangolo di Sierpinski. È un frattale simile all'insieme di Cantor ottenuto a partire da un quadrato, descritto dal matematico polacco Waclaw Sierpiński nel 1916.



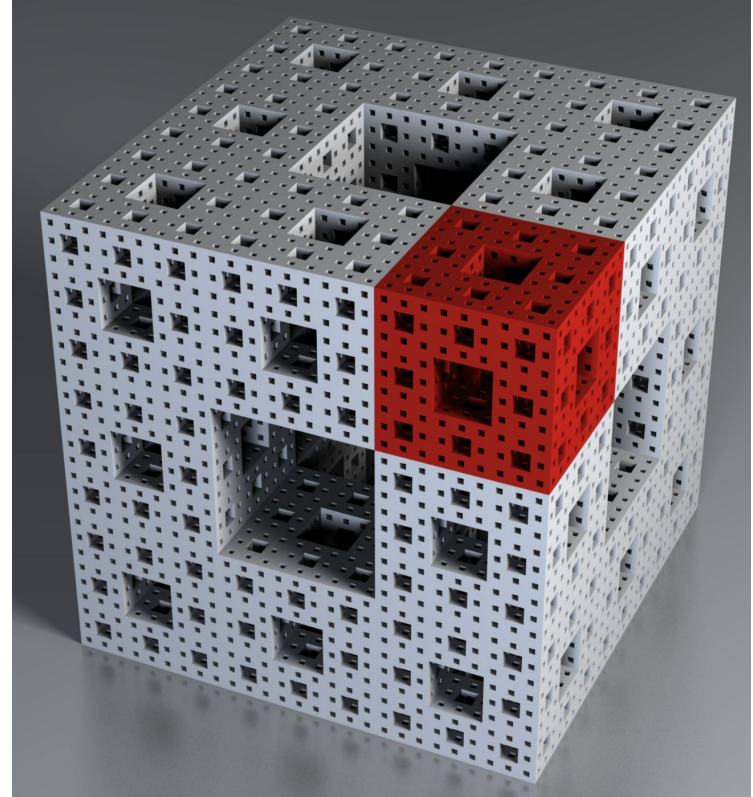
1. Per costruirlo si prende un quadrato e lo si divide in nove parti uguali.
2. Si toglie il quadrato centrale
3. Ci si sposta sui quadrati ai bordi. Questi vengono suddivisi allo stesso modo e si toglie il relativo quadratino centrale.
4. Si procede all'infinito, ottenendo così il tappeto/groviera di Sierpinski.

Ripetendo il procedimento all'infinito resta una figura che ha area nulla e perimetro infinito.

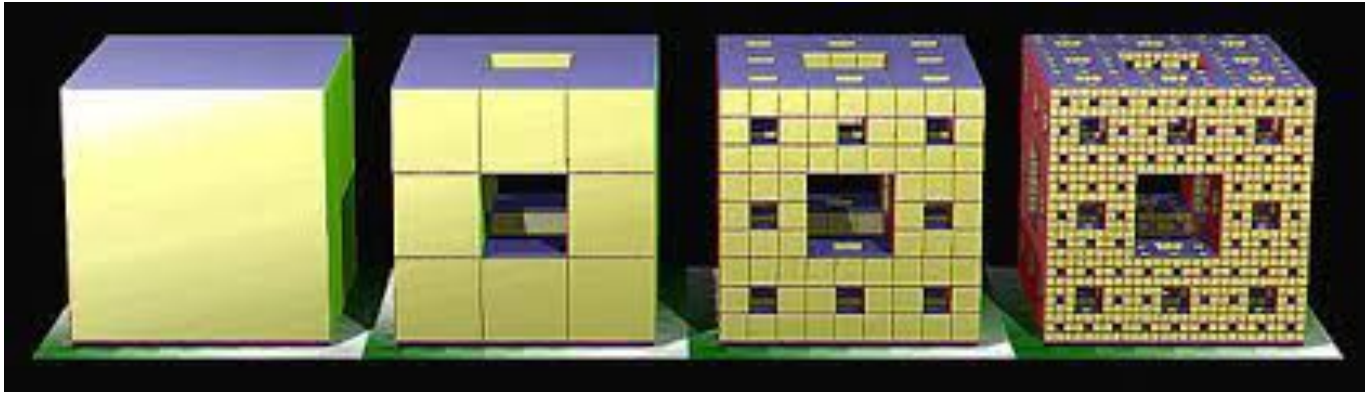


SPUGNA DI MENGER

Ogni faccia della spugna è un tappeto di Sierpinski, quindi continua ad avere area nulla e perimetro infinito, in più ha anche volume nullo. È stato descritto per la prima volta da Karl Menger nel 1926, mentre esplorava il concetto di dimensione topologica.



1. Si parte da un cubo.
2. Dividere il cubo in 27 cubi.
3. Rimuovere il cubo centrale e i 6 cubi centrali ad ogni faccia: restano così 20 cubi.
4. Ripetere i passi 1-3 su ogni nuovo cubo.
5. Ad ogni iterazione si ottiene un oggetto con più buchi di prima. La spugna di Menger è lo spazio che si ottiene come limite di queste operazioni.

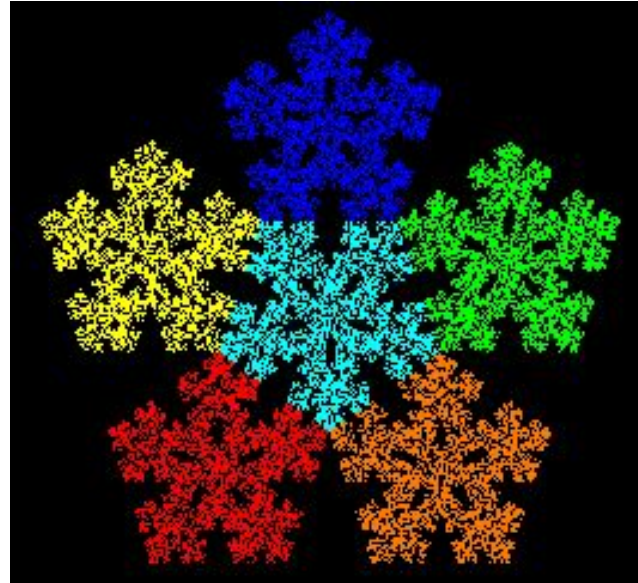


IL FIOCCO DI NEVE O MERLETTO DI KOCH

La curva di Koch è una delle prime curve frattali di cui si conosca una descrizione. Apparve per la prima volta su un documento del 1904 intitolato “*Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire*” del matematico svedese Helge von Koch.



www.tuttodisegni.com



CURVA DI KOCH

A)



n=0



n=1



n=2



n=3



n=4



n=5

B)



m=0, p=1



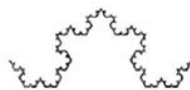
m=1, p=1



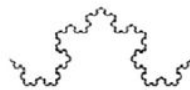
m=2, p=1



m=3, p=1



m=4, p=1



m=5, p=1



m=0, p=2



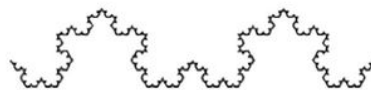
m=1, p=2



m=2, p=2



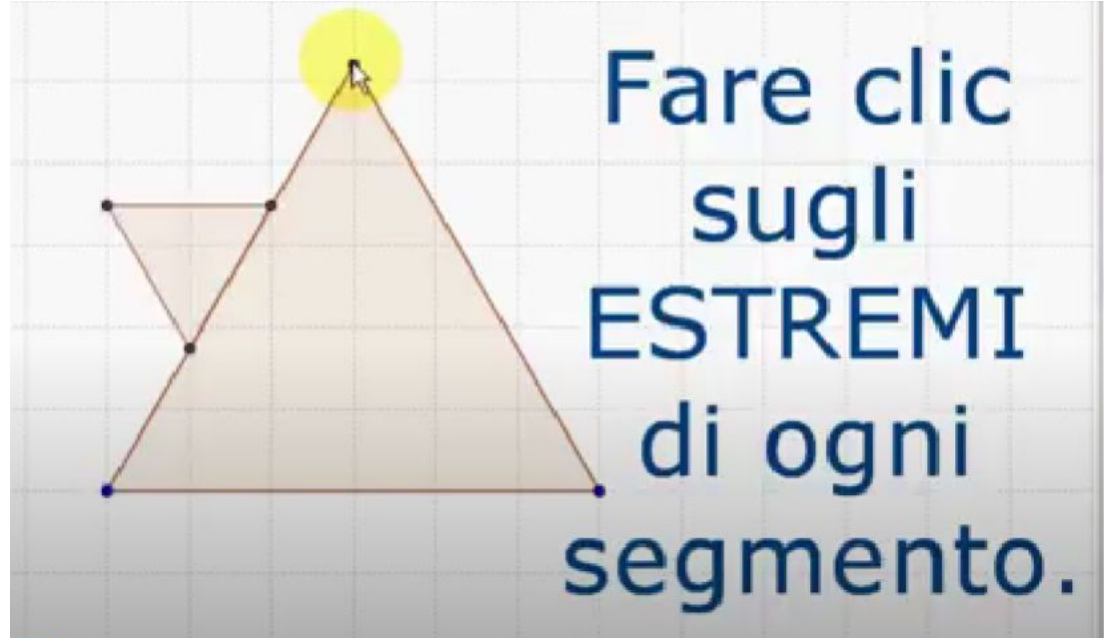
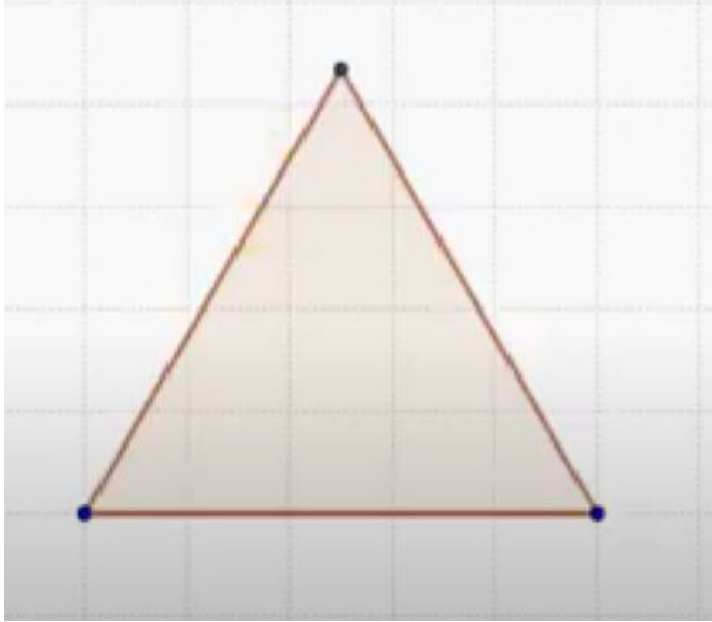
m=3, p=2



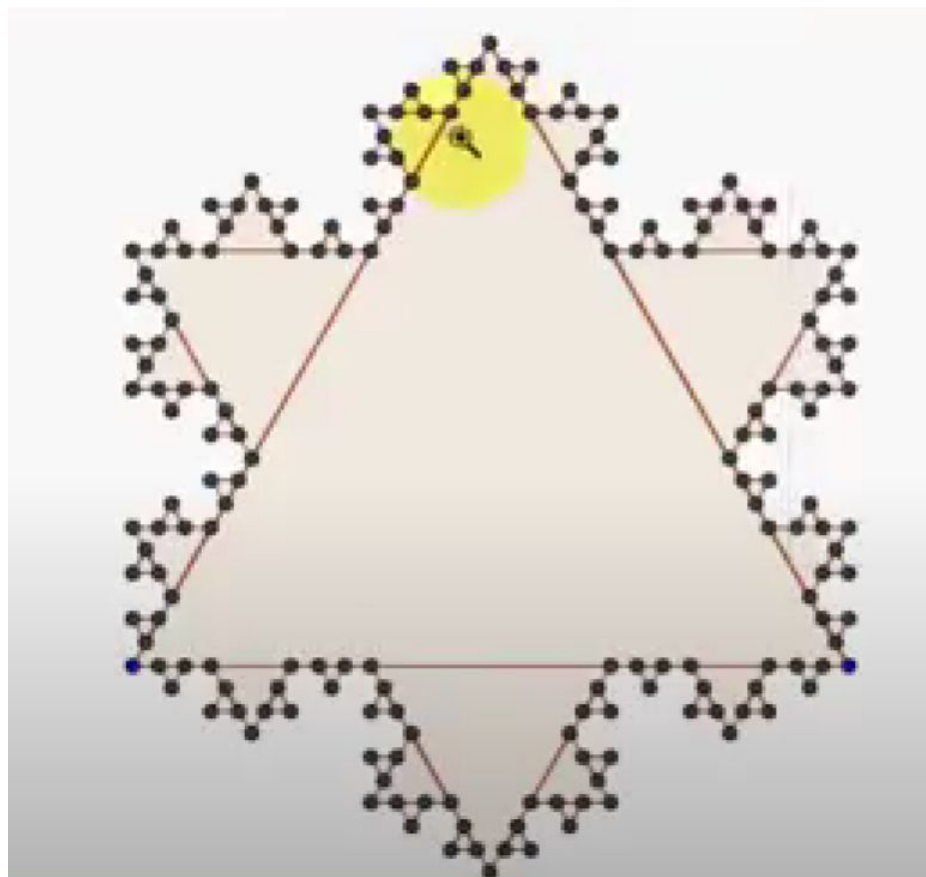
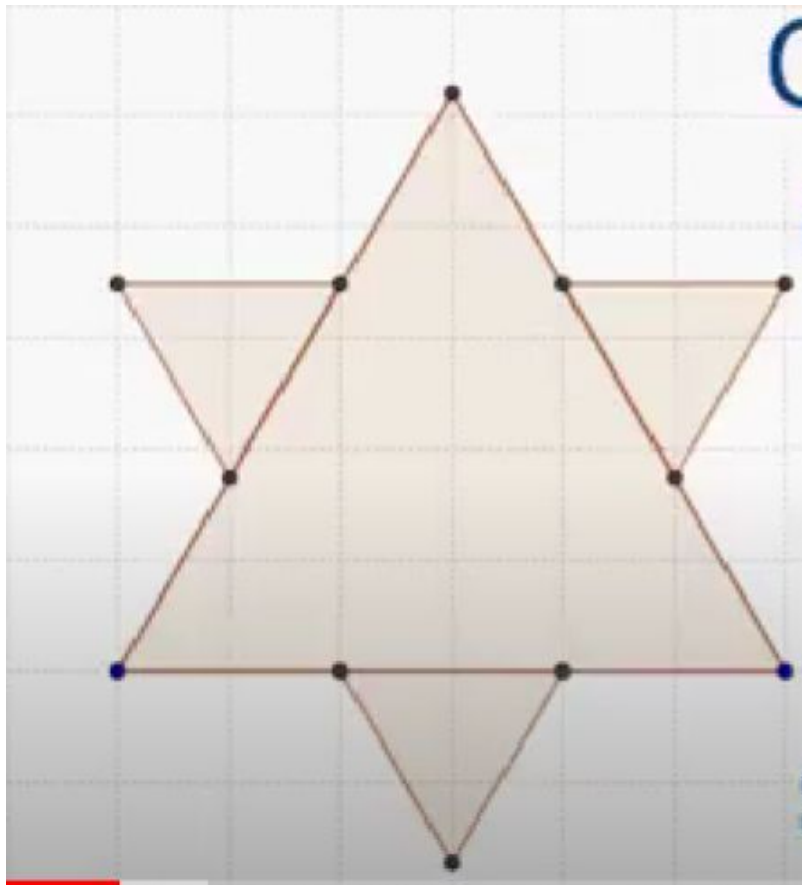
m=4, p=2



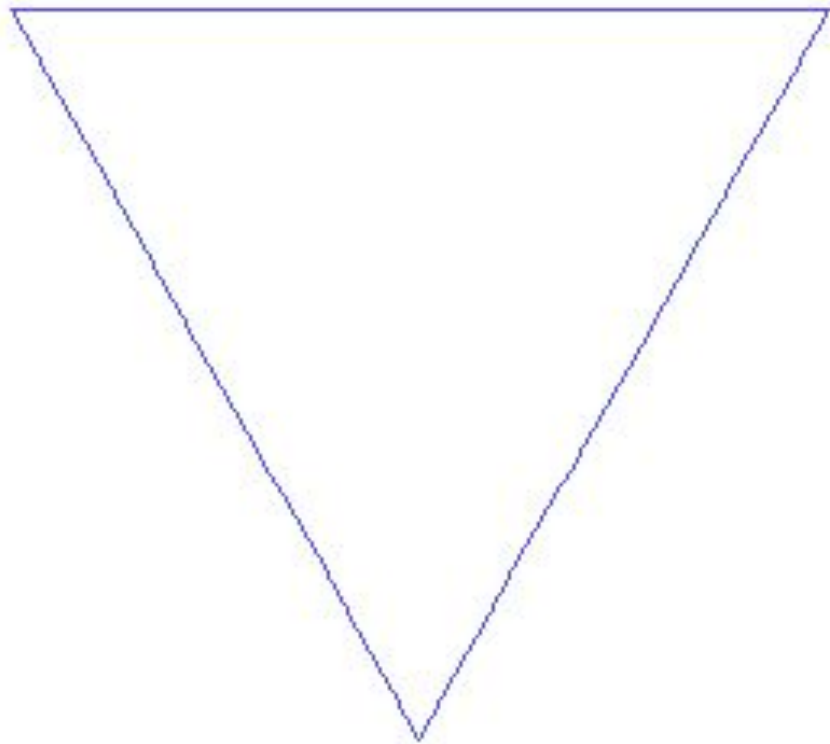
m=5, p=2



1. COSTRUIRE UN TRIANGOLO
EQUILATERO



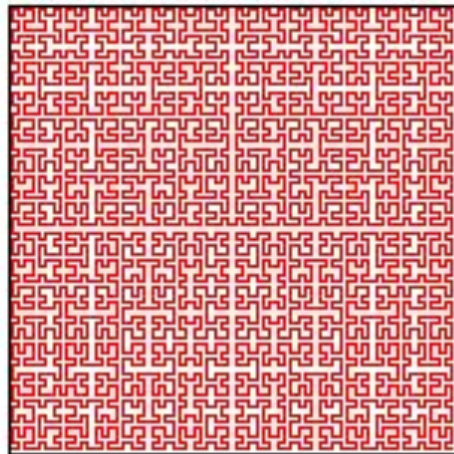
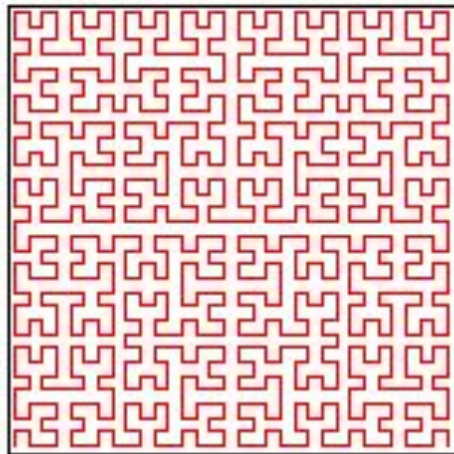
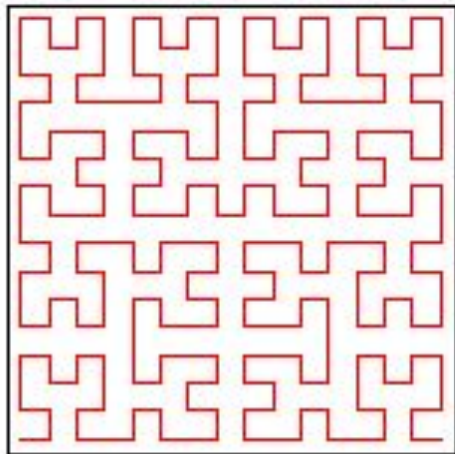
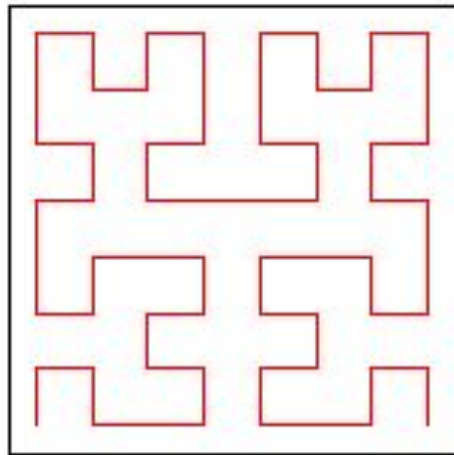
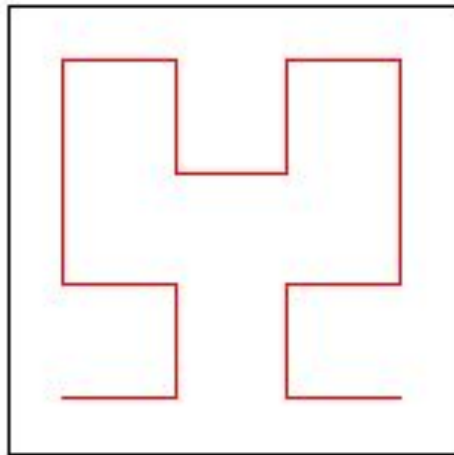
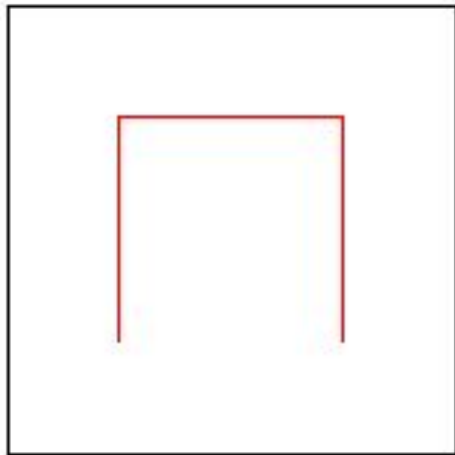
CONTINUARE A FARE CLIC SUGLI
ESTREMI DI OGNI SEGMENTO.



CURVA DI PEANO

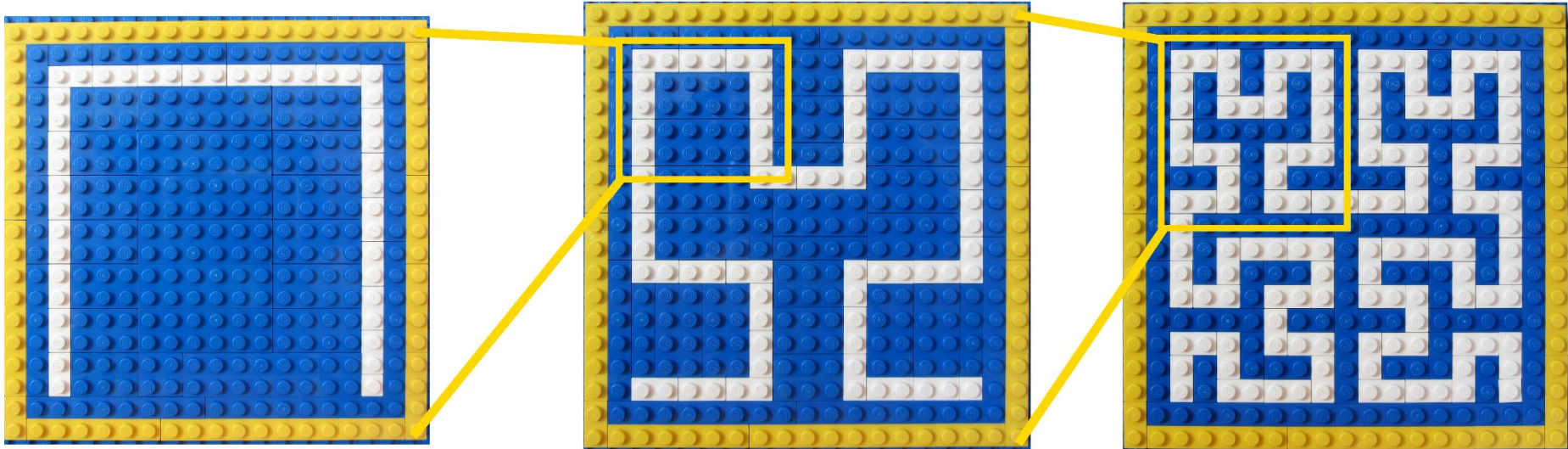
Nel 1890 il matematico Giuseppe Peano (1858-1932) pubblicò un articolo dal titolo "*Sur une courbe qui remplit toute une aire plane*" in cui presentava una curva che aveva la strana proprietà di riempire tutto un quadrato. Questo fatto lasciò molto perplessi poiché, per definizione, una curva è un ente geometrico ad una sola dimensione, mentre il quadrato ha due dimensioni. Eppure, la curva di Peano passa per tutti i punti del quadrato.





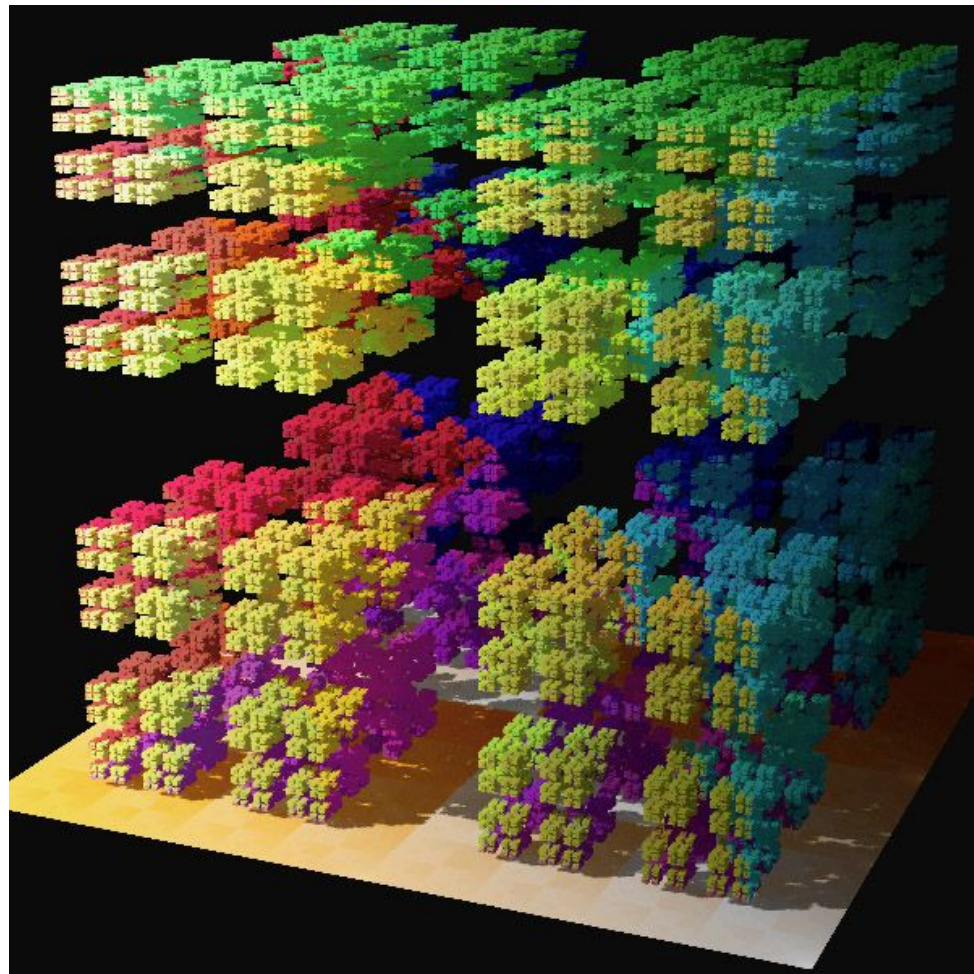
CURVA DI HILBERT

La curva di Hilbert è una curva frattale continua che riempie il piano descritto inizialmente dal matematico tedesco David Hilbert nel 1891, come una variante delle curve che riempiono il piano scoperto per Giuseppe Peano nel 1890.



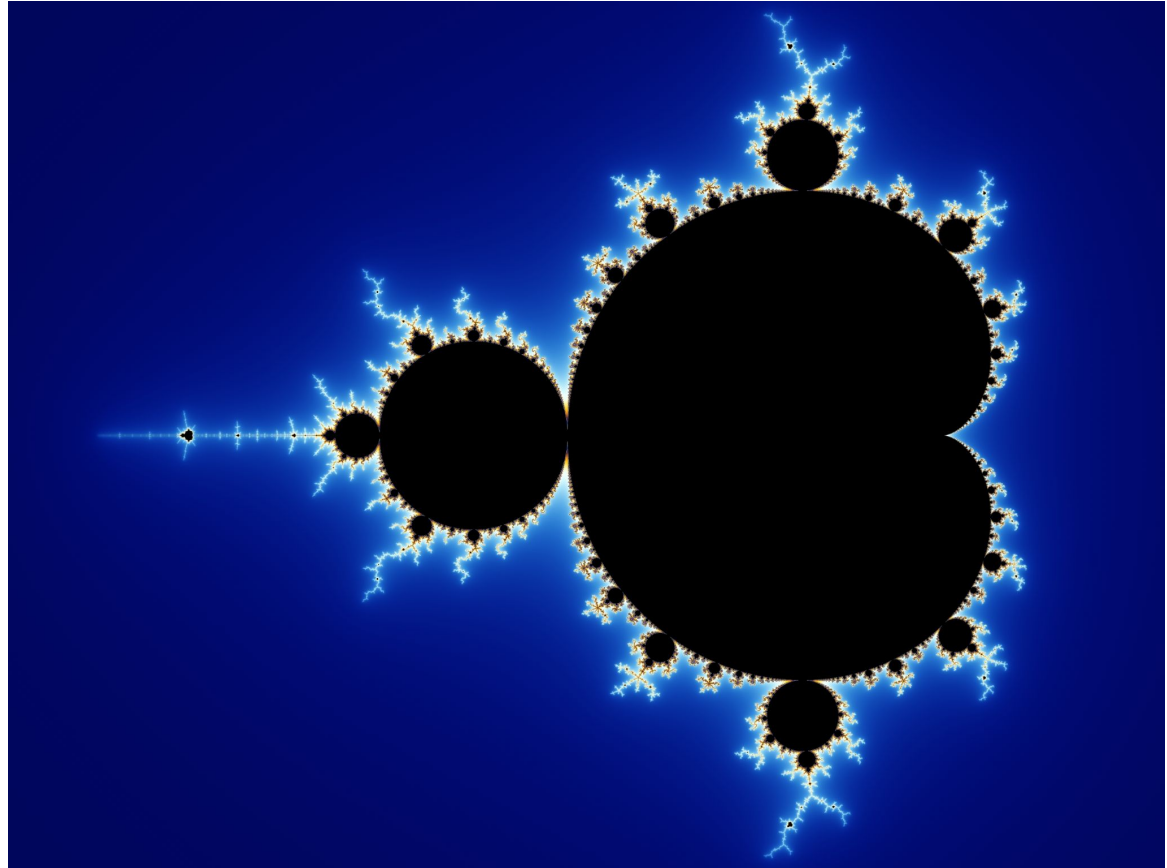
INSIEME DI CANTOR

L'insieme di Cantor, introdotto dal matematico tedesco Georg Cantor, è un sottoinsieme dell'intervallo $[0,1]$ dei numeri reali.



INSIEME DI MANDELBROT

L'insieme di Mandelbrot è un luogo geometrico del piano complesso; più precisamente è l'insieme dei punti di tale piano che soddisfano la legge di Mandelbrot.

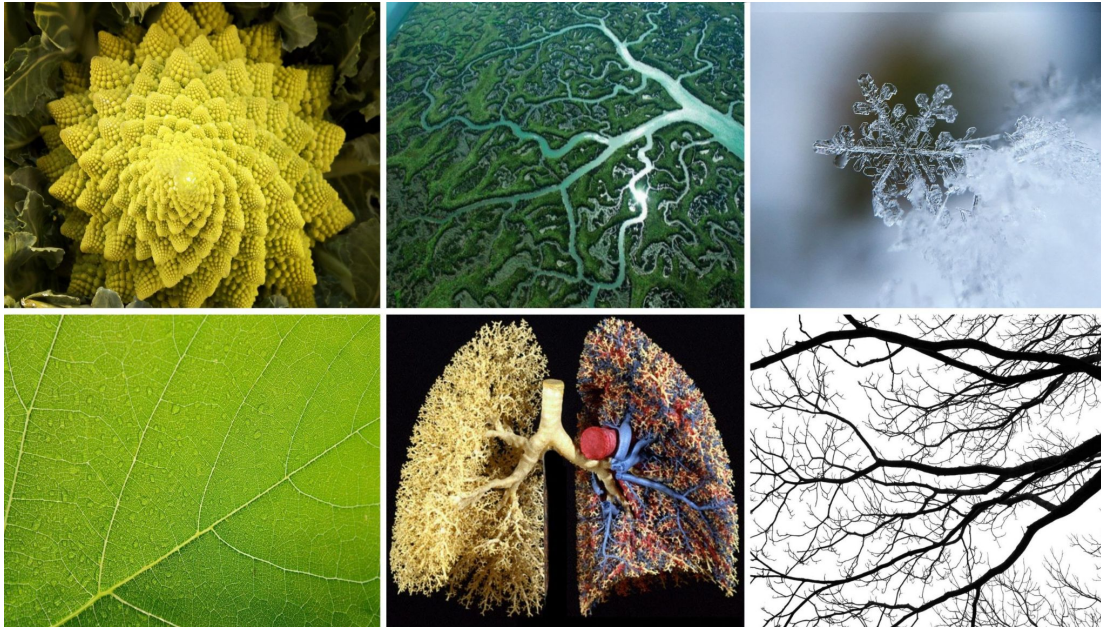




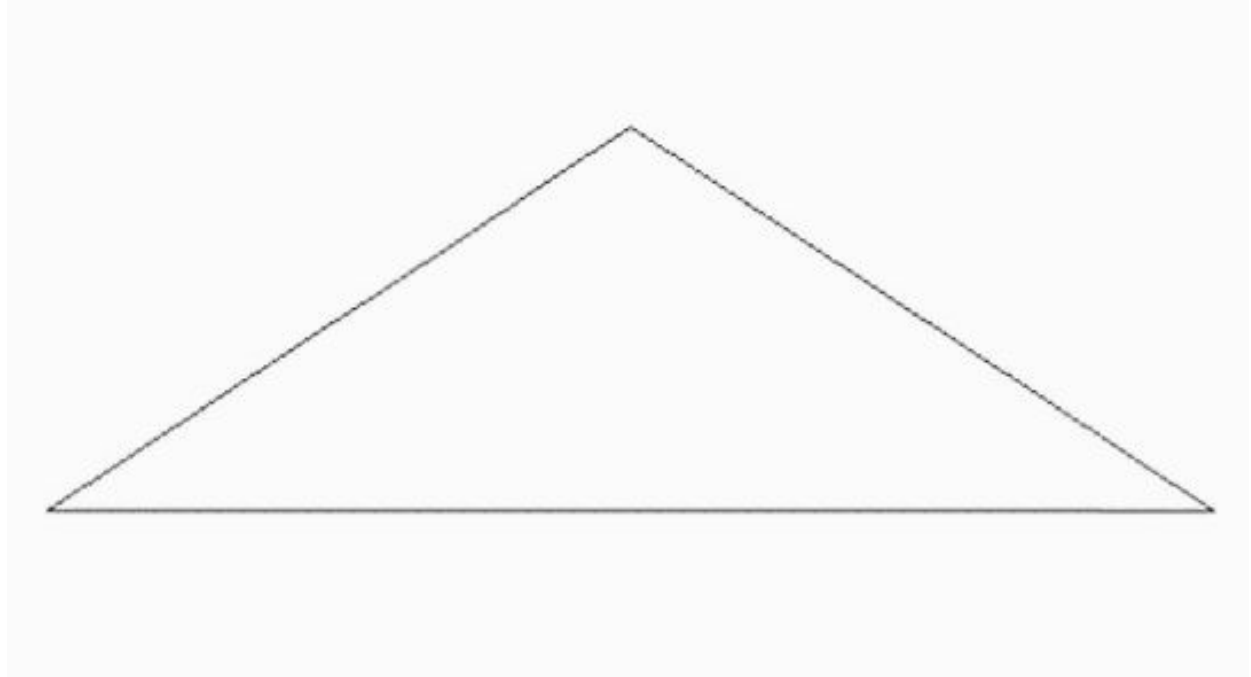
**DOVE SI
TROVANO I
FRATTALI
NELLA VITA
QUOTIDIANA?**

NATURA

I frattali sono molto presenti in natura come ad esempio nella conformazione delle montagne o delle coste oppure nei fiori, nelle nuvole, negli alberi e in alcuni ortaggi.



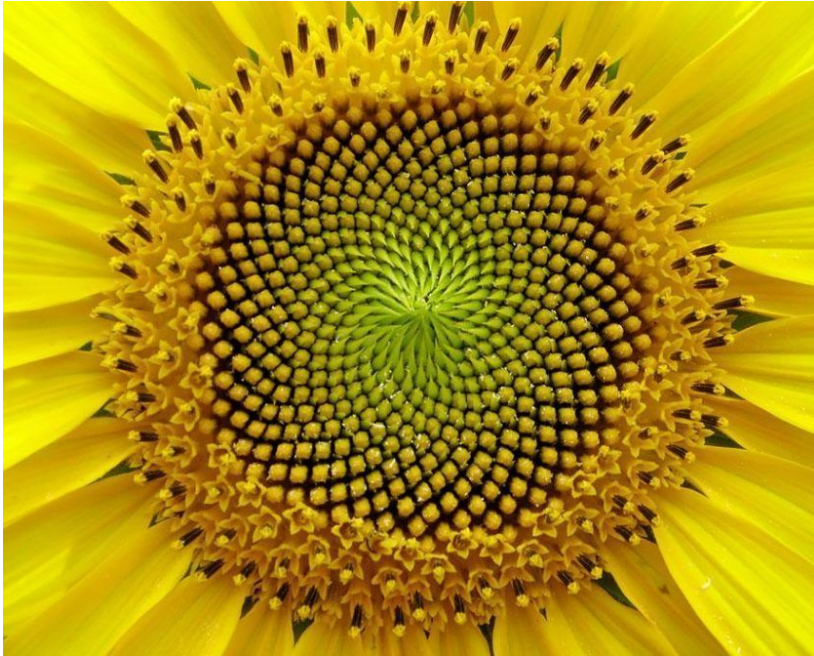
LA FORMAZIONE DELLE MONTAGNE



LA FORMA DELLA FELCE



I PETALI DI UN FIORE



IL BROCCOLO ROMANO



CORPO UMANO

Le figure frattali si trovano anche all'interno del nostro corpo per esempio nei polmoni in cui le varie diramazioni dei bronchi e dei bronchioli e degli alveoli hanno una struttura simile e questo gli permette di essere considerati dei frattali.

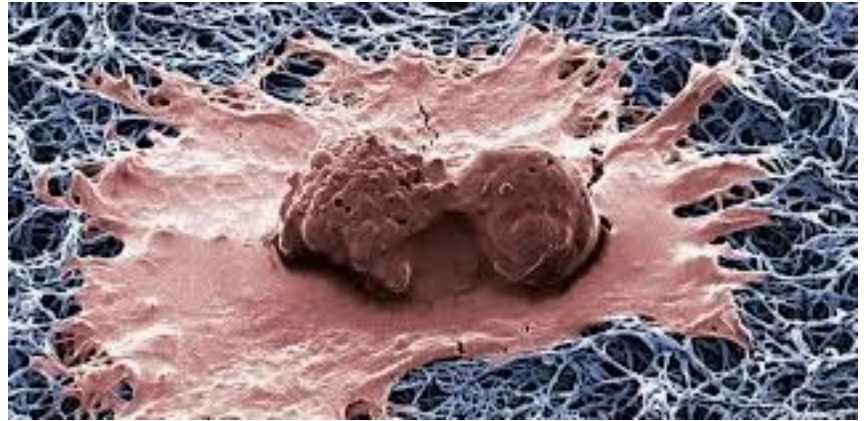
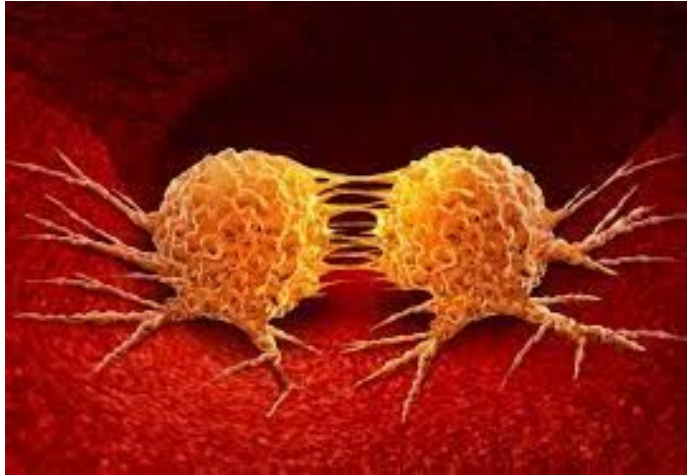


SISTEMA NERVOSO



VASI SANGUIGNI

La geometria frattale in oltre ha permesso di fare dei passi avanti con la ricerca del cancro al seno in quanto facilitano la distinzione tra massa benigna o maligna



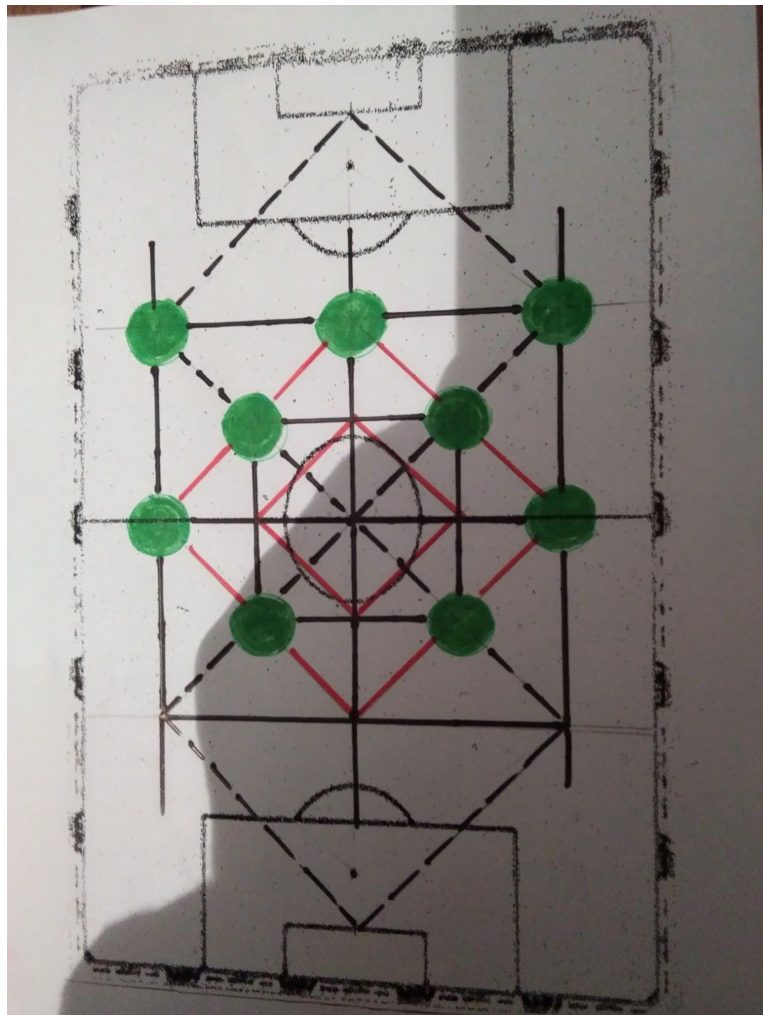
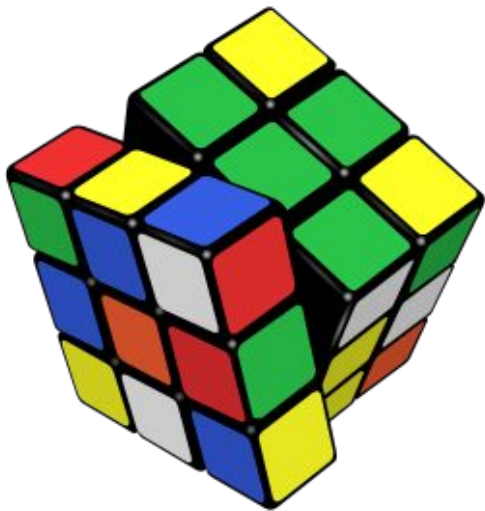
ARTE

Secondo il fisico Richard Taylor dell'Università dell'Oregon, la pittura di Jackson Pollock è a trama frattale. Si tratta anzi del primo caso che si è scoperto e studiato di frattali generati da un essere umano. Il fisico e i suoi colleghi hanno misurato l'intera produzione del pittore rilevando una dimensione frattale crescente nel tempo: dall'1,3 del 1945 al 1,9 del 1950. A seguito delle ricerche condotte dal fisico sono nati dei veri movimenti di pittura frattale.

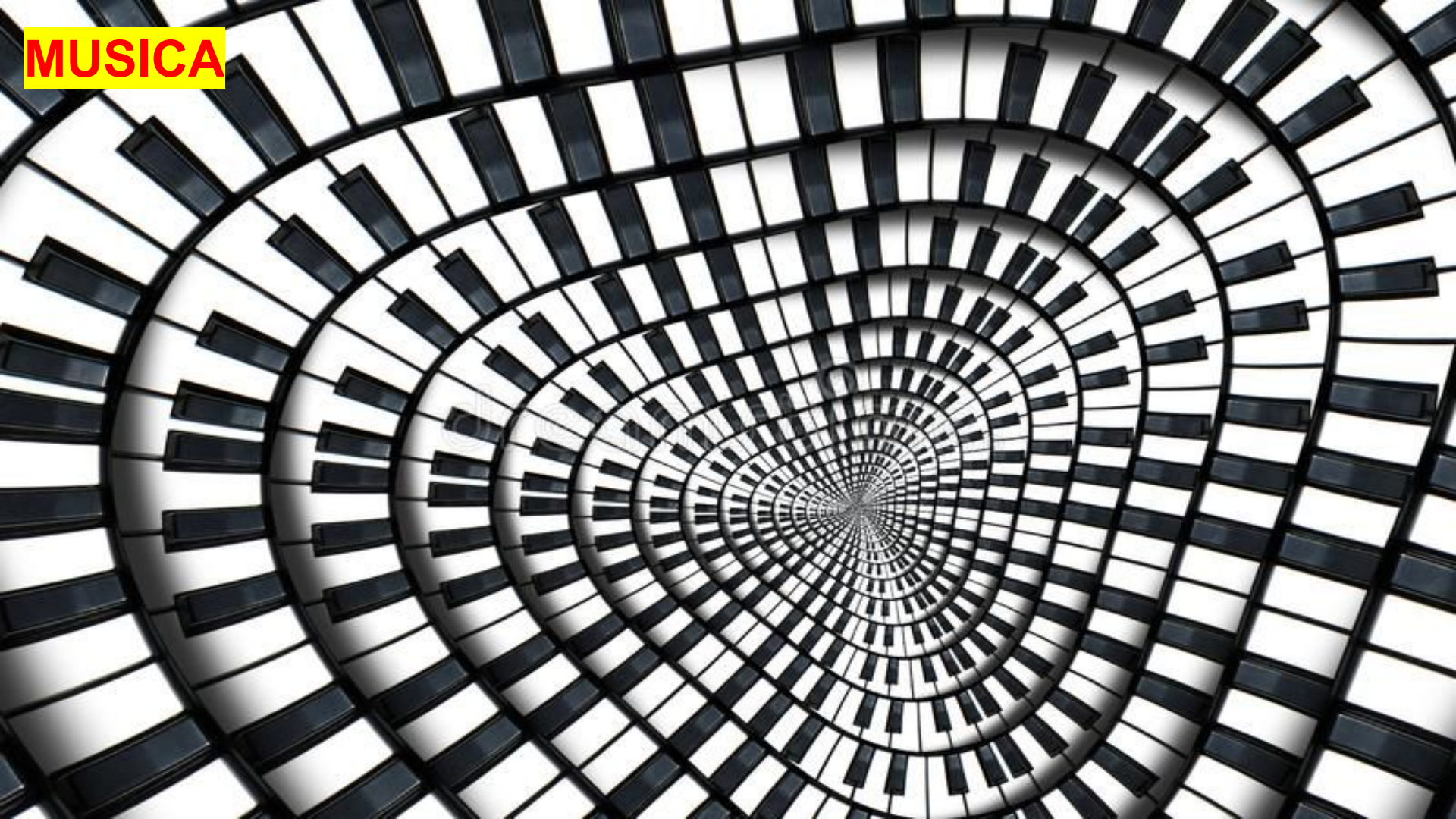


GIOCHI

Anche in molti giochi si possono riscontrare delle strutture frattali. Un esempio può essere il cubo di Rubik oppure lo schema di una partita di calcio dove i giocatori seguono degli schemi precisi nei quali si possono ritrovare le strutture frattali.



MUSICA



- Le variazioni nel pitch (altezza dei suoni) musicale seguono una legge di potenza $1/f$ (proprietà dei frattali), dove f designa la frequenza temporale degli eventi, la quale consente di raggiungere questo equilibrio. La distribuzione $1/f$ è la chiave di diversi fenomeni naturali e sensoriali.

*Last Chorus, Bach's
"Passion" (St. Matthew).*



Ad esempio, analizzando la frequenza di vari disastri naturali, fra cui terremoti, frane, alluvioni, impatti di meteoriti/asteroidi, Kenneth Hsü in Actualistic catastrophism, ha rinvenuto una "relazione frattale" tra la frequenza e l'intensità dei suddetti eventi:

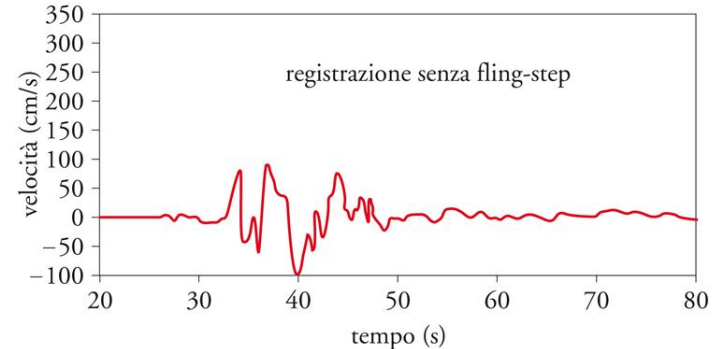
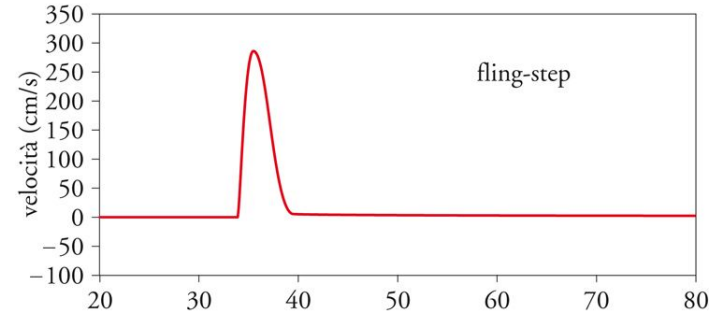
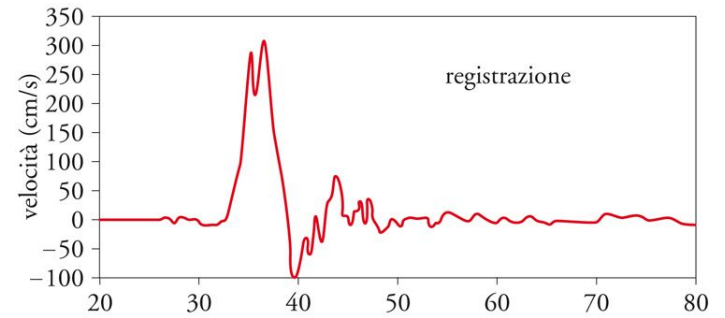
Dove:

M = parametro designante l'intensità dei disastri;

c = costante di proporzionalità;

D = la dimensione frattale.

Analizzando la struttura spettrale di ritmi musicali i ricercatori hanno dimostrato che, oltre al pitch, anche i ritmi musicali rispondono a una legge di potenza $1/f$.



FONTI

- Progetto polymath
- www.frattali.it a cura di Laura Liotti
- Dimensione frattale - Introduzione ai frattali
- Inchiostro virtuale
- Wikipedia
- Italiawiki
- Skuola.net
- DFG - Calcolo dell'insieme di Mandelbrot
- Le Scienze
- Scienzaemusica
- Frattali - Natura
- Fiocco di koch - Geogebra
- Enciclopedia Treccani
- Biologia



**GRAZIE PER
L'ATTENZIONE!!!**

