

Il Gatto di Arnold

e le mappe ergodiche

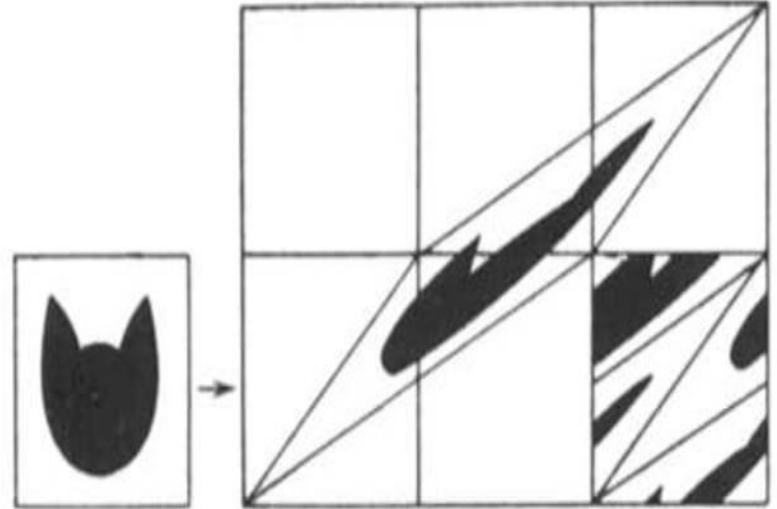
Sofia Di Bernardo e Alice Volpi, 3A

sofia.dibernardo@studenti.liceosarpi.bg.it

alice.volpi@studenti.liceosarpi.bg.it

Il gatto di Arnold - Definizione

Con gatto di Arnold si intende una mappa che ha come dominio e codominio il cosiddetto “toro” e mostra l’evoluzione temporale di un’immagine nello spazio. Il suo effetto è quello di distorcere l’immagine rappresentata e deformarla in maniera caotica, preservandone il volume, ma includendo la possibilità per le regioni di cui è composta la mappa di passare l’una intorno all’altra. Il termine tecnico per descrivere questa mappa è “ergodica”.



Le mappe ergodiche - Che cosa sono?

Il termine “mappa” in matematica è spesso usato per indicare una **funzione**. Di conseguenza la mappa di Arnold considerata nella sua versione “normale” corrisponde ad una funzione normale, ovvero che non presenta particolarità, mentre nella versione periodica che vedremo in seguito corrisponde ad una funzione periodica.

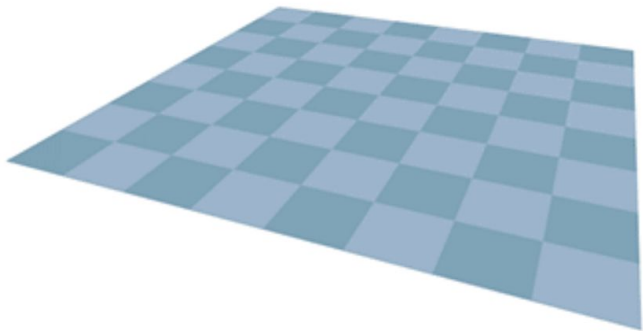
Con “ergodico” invece si indica lo studio matematico del comportamento a lungo termine di sistemi dinamici, ovvero sistemi in cui una determinata funzione descrive la dipendenza dal tempo di un punto in uno spazio geometrico.

Il toro - Definizione

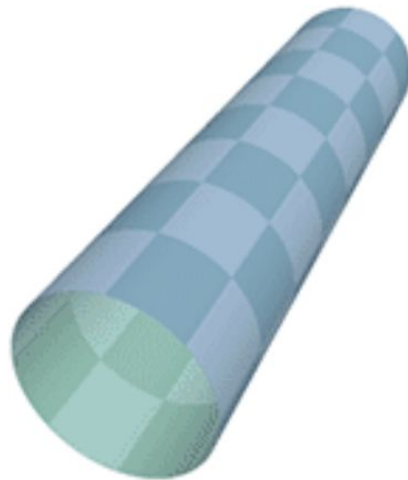
Per riuscire a spiegare gli effetti della mappa di Arnold bisogna prima chiarire cosa sia un **toro**. Il toro è una superficie di rivoluzione generata facendo ruotare un cerchio nello spazio tridimensionale attorno a un'asse complanare al cerchio e viene comunemente chiamato ciambella.

Considerando il fatto che il toro vive in uno spazio tridimensionale, per definire meglio le modalità attraverso cui avviene la deformazione della figura, è preferibile fare riferimento al toro come rettangolo. Per spiegarlo in maniera pratica bisogna prendere il toro nella sua forma di ciambella, tagliarlo in modo da aprirlo e stenderlo per ottenere un cilindro; aprire poi il cilindro in modo da ottenere un rettangolo.

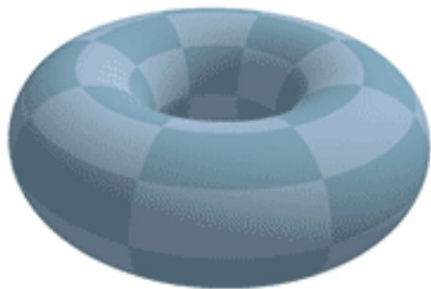
Fase 1



Fase 2



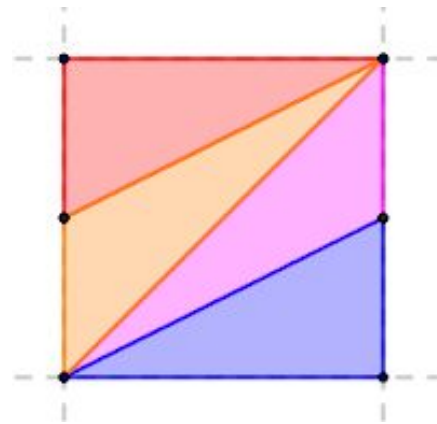
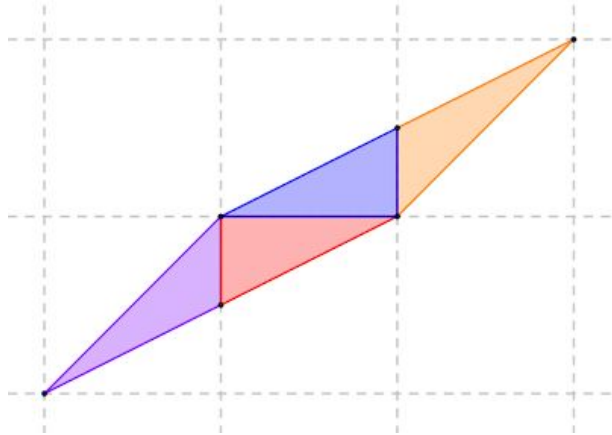
Fase 3



Le fasi del toro

Il toro

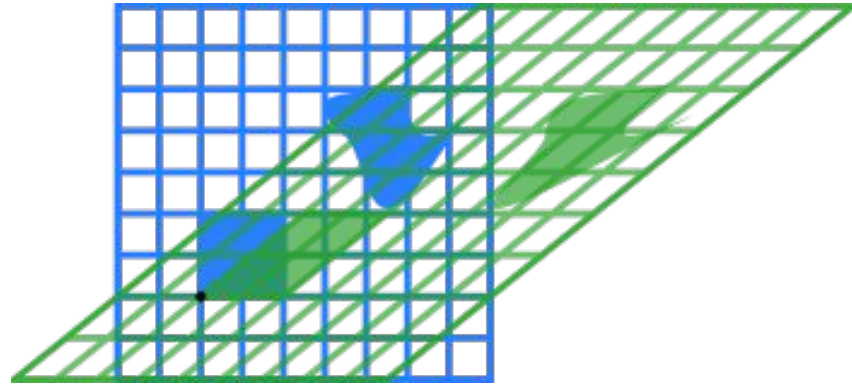
Prendendo il toro come un quadrato si può meglio osservare le modalità attraverso cui avviene la deformazione della figura: il sistema del gatto di Arnold prende il quadrato, lo deforma in un certo modo e rimappa sul rettangolo iniziale il risultato ottenuto. Una precisazione da fare è quella che, essendo un toro, ciò che esce da destra rientra a sinistra e ciò che esce dal basso rientra dall'alto e viceversa.



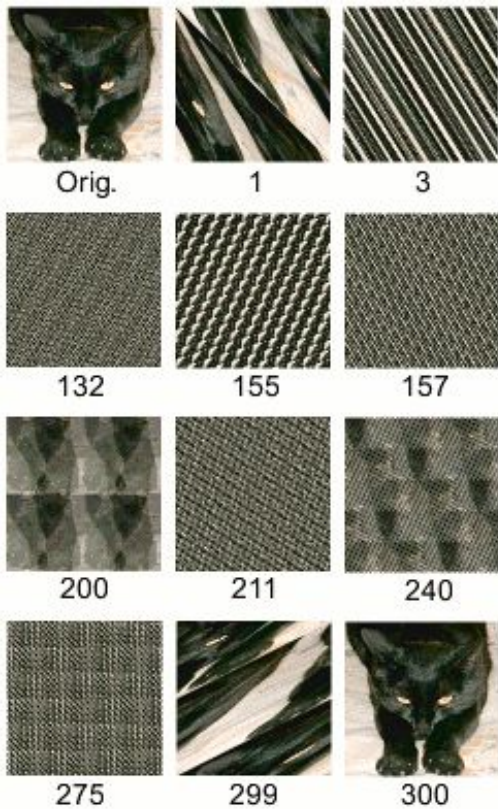
Shear mapping - La mappatura di taglio

Nella geometria piana una mappatura di taglio è una mappa lineare che sposta ogni punto in una direzione fissa, di quantità proporzionale alla sua distanza che è tracciata dalla linea parallela a quella direzione e attraversa l'origine.

Nella Mappa del gatto di Arnold, la mappatura prende un qualsiasi punto con coordinate (x,y) e lo trasla al punto $(2x+y,x+y)$.

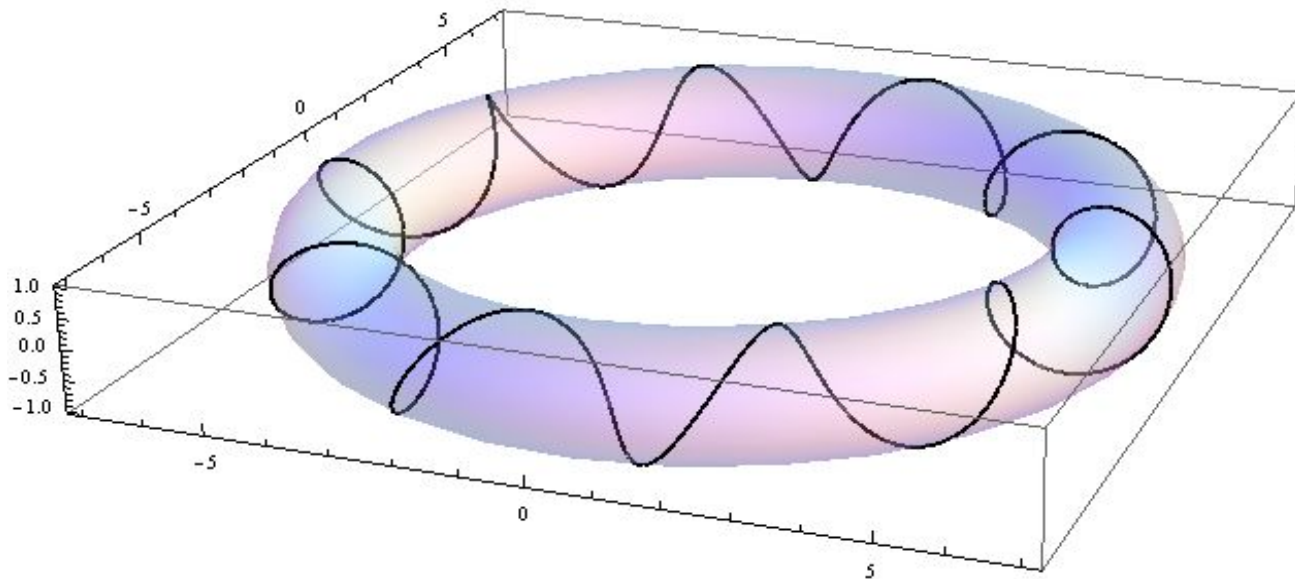


Rappresentazione grafica



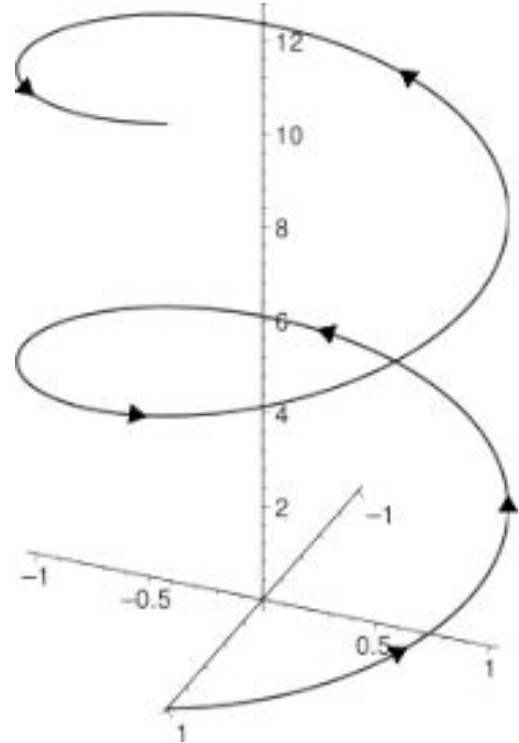
Funzioni ergodiche - La mappa di Arnold

Nel caso della Mappa di Arnold le eliche rappresentanti le traiettorie su un toro bidimensionale non si ripetono mai e passano arbitrariamente vicino a qualsiasi punto della superficie del toro, si ha così un sistema ergodico.



Funzioni ergodiche - La mappa di Arnold

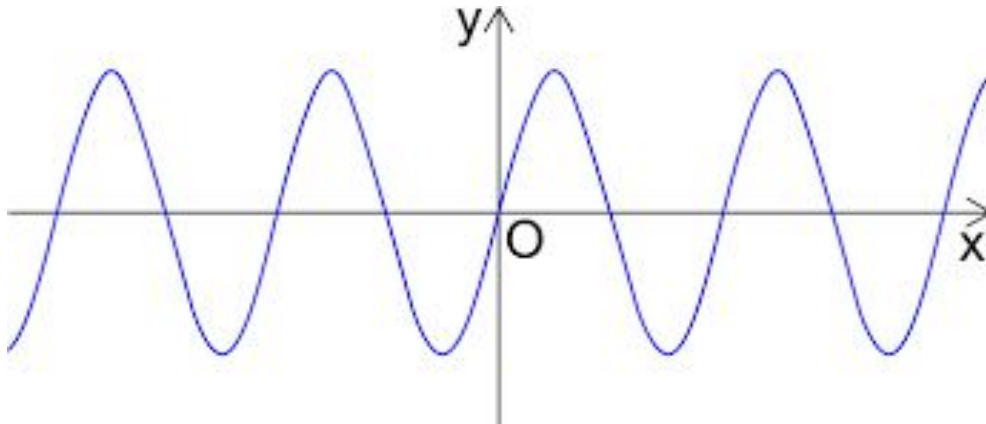
Aggiungendo una nuova dimensione al toro, l'elica potrebbe passare sopra o sotto sè stessa spostandosi nella nuova dimensione. Intrecciandosi su sè stessa, una traiettoria può diventare caotica e l'insieme di molte traiettorie può confondersi. Trasformazione include la capacità delle regioni di passare l'una intorno all'altra.



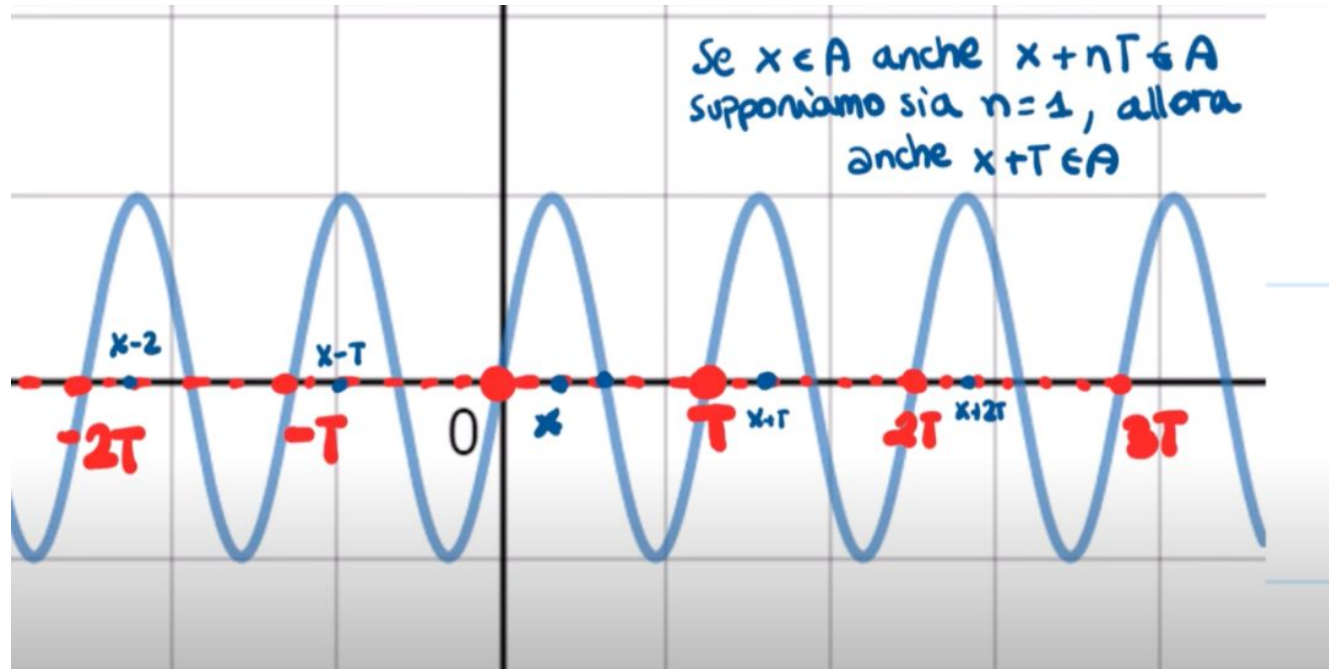
La funzione periodica

Una funzione periodica è una funzione che si ripete inalterata a intervalli regolari.

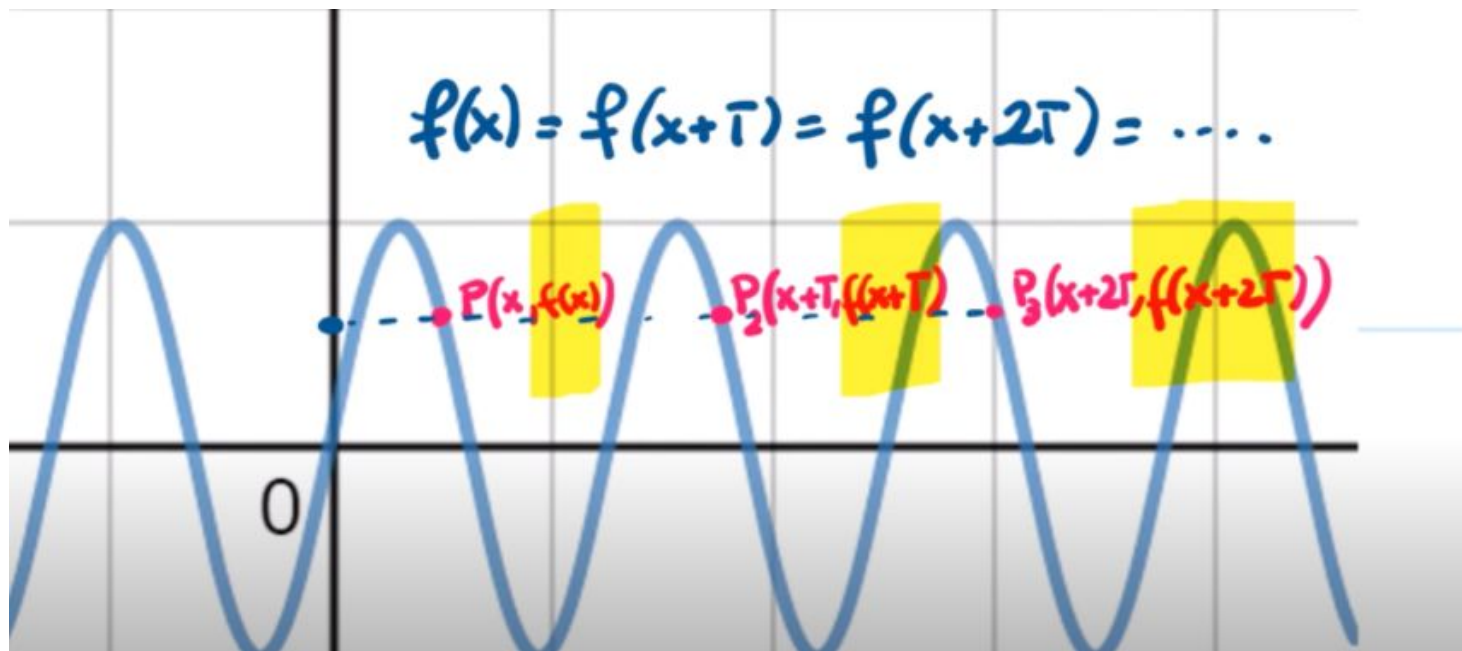
Prendiamo una funzione f definita su un certo dominio A e che ha valori reali ($f:A \rightarrow \mathbb{R}$); si dice periodica se verifica due condizioni particolari che si verificano se esiste un elemento $T > 0$ tale che:



1. se prendiamo un elemento x nel dominio A necessariamente anche $x + nT$ apparterrà al dominio A al variare di n in \mathbb{Z}



2. la funzione deve essere invariante per traslazione di T (al variare qualsiasi elemento x nel dominio l'immagine di x mediante la funzione coincide con l'immagine di $x+T$ mediante la funzione)



Versione Pixelata e Gatti fantasma



Nel momento in cui il numero di pixel da cui è composta l'immagine della mappa del gatto di Arnold aumenta si possono osservare dei fenomeni particolari.

Prendiamo come esempio un'immagine di 768 pixel, questa consiste di punti colorati nella forma $(i/768, j/768)$ dove i e j sono numeri interi $0 \leq i < 768$ e $0 \leq j < 768$. Quando i e j sono multipli di 2, i punti si riducono alla forma $(p/384, q/384)$, ovvero gli stessi punti che avremmo dipingendo il quadrato dell'unità con un'immagine di 384 per 384 pixel. Il periodo di un'immagine di 384 per 384 pixel è esattamente 96. Quindi, dopo 96 iterazioni nell'immagine di 768 pixel tutti i punti hanno le stesse coordinate di quelli nell'immagine di 384 pixel, che sono ritornati alla posizione di partenza. Questo spiega la presenza delle immagini fantasma.

Oltre a queste immagini fantasma, nell'arco delle iterazioni si possono individuare anche immagini capovolte, sempre per lo stesso principio.

Curiosità

La crittografia delle immagini è diversa da quella dei testi a causa di vari fattori tra cui la correlazione dei pixel, difficili da gestire con metodi tradizionali, per questo il caos è una delle direzioni di ricerca emergenti nell'ambito: la mappa del gatto di Arnold in particolare mescola la posizione dei pixel senza modificarne i valori. Nel processo di rimescolamento questa garantisce un alto livello di casualità, permettendo così di prevenire l'accesso non autorizzato all'immagine.



Fonti

- [Gli studenti di oggi: Il gatto di Arnold](#)
- [Vladimir Arnold's Cat Map | Galileo Unbound](#)
- [Arnold's Cat Map](#)
- [Gatto di Arnold - Wikipedia](#)
- [Shear mapping - Wikipedia](#)
- [Arnolds Cat](#)
- [Mappa \(matematica\) - Wikipedia](#)
- [Teoria ergodica - Wikipedia](#)
- IPASJ International Journal of computer science (IJCS), volume 6, Issue 4, April 2018
- [Che cos'è una funzione periodica e come si riconosce \(TEORIA\)](#)